

Le bulletin

Semestriel



Bulletin de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision

Éditorial : Alexandre Villeminot, Emmanuel Muhl, et Fabien Petitjean

L'ingénierie numérique de la chaîne logistique au service de la croissance du groupe PSA

Article invité : Frédéric Roupin

L'Approche par Programmation Semidéfinie en Optimisation Combinatoire

Article invité : Olivier Dubois et Jacques Mandler

Phénomènes de seuil ou transitions de phase dans les problèmes combinatoires

Vie de l'association :

Le projet de GdR R.O.

Journée R.O. de la Société Mathématique de France

Nouveau Comité Editorial pour RAIRO-Operations Research

Challenge ROADEF 2005

4'OR, revue de la ROADEF

Manifestations parrainées par la ROADEF :

ROADEF'05 à Tours

Compte Rendu de MOSIM'04 à Nantes

Graph Theory 2004 : Une conférence à la mémoire de Claude Berge

Groupes de travail ROADEF

Annonces des manifestations à venir

Rejoindre la ROADEF

Éditeur Marie-Christine Costa, CEDRIC - CNAM, 292 Rue Saint-Martin F75141 Paris cedex 03

Siège social Jean-Charles Billaut, Département d'Informatique, Polytech'Tours, 64 avenue Jean Portalis 37200 Tours

Publication Eric Sanlaville, LIMOS - Université Blaise Pascal, Campus des Cézeaux, 63173 Aubière Cédex

Site web <http://www.roadef.org>

Langues officielles Français et anglais

Édition Automne - Hiver 2004
Numéro 13 - Décembre 2004

L'ingénierie numérique de la chaîne logistique au service de la croissance du groupe PSA-Peugeot-Citroën

Alexandre Villeminot, Emmanuel Muhl, Fabien Petitjean

{alexandre.villeminot, emmanuel.muhl, fabien.petitjean}@mpsa.com

1 La logistique chez PSA

Le Groupe PSA-Peugeot-Citroën a construit et adapté son organisation logistique face aux évolutions successives de l'industrie automobile. Aujourd'hui, la satisfaction du client passe par une offre diversifiée et un produit fabriqué à la demande avec un choix d'options important, dans les meilleurs délais et à un bon rapport qualité/prix. Le coût des installations de production étant élevé, les différents modèles sont donc assemblés sur la même ligne de fabrication, appelée « ligne d'assemblage à modèles mélangés ».

1.1 L'usine terminale

Une usine terminale est un ensemble de lignes de production fortement contraintes et très sensibles aux aléas de production. Le processus de fabrication est composé de trois ateliers successifs : le *ferrage*, la *peinture* et le *montage*.

L'usine terminale peut être assimilée à une ligne de production FIFO, les stocks intermédiaires jouant

deux rôles principaux : réguler le flux en volume pour contrer les aléas de production et réguler le flux en qualité, en l'optimisant pour respecter les contraintes de fabrication, lisser la charge des postes de travail ou remettre en ordre la liste de fabrication.

1.2 L'organisation logistique

Dans une usine de production automobile, on distingue la **logistique interne**, qui correspond au processus de fabrication du véhicule en usine terminale, de la **logistique externe** ou logistique d'approvisionnement, liant l'usine à l'ensemble de ses fournisseurs. Leurs améliorations concernent à la fois la qualité des flux internes à l'usine, mais également la qualité et la fiabilité de ses approvisionnements (fig. 1). Les objectifs actuels du groupe sont donc :

- Améliorer les conditions de travail
- Produire au moindre coût en respectant les délais
- Synchroniser les flux d'approvisionnement et le flux de fabrication.

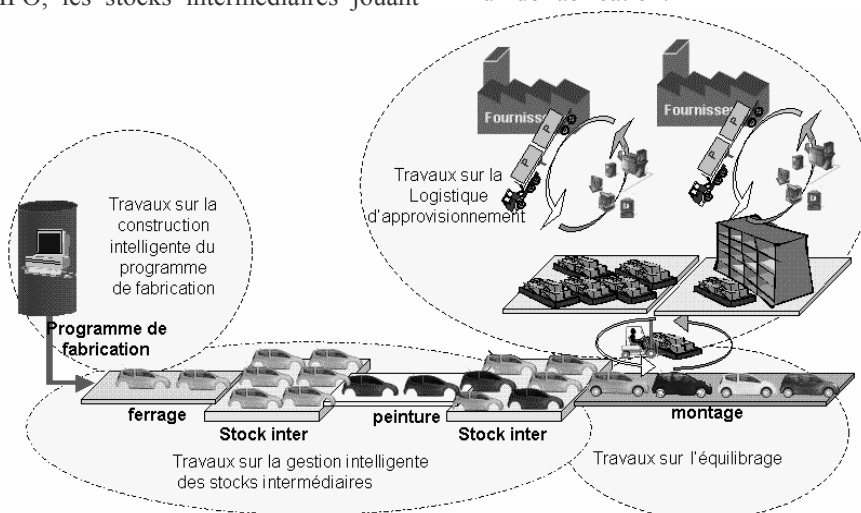


Figure 1. Périmètre des travaux sur les flux interne et d'approvisionnement.

1.3 Synchroniser les flux

Pour pratiquer le JAT, il est indispensable de synchroniser les flux d'approvisionnement avec le flux principal de fabrication. Cela impose de se doter d'une référence : la Liste Unique Ordonnée (LUO). En entrée d'usine, une liste de véhicules est construite répondant en grande partie aux contraintes de l'atelier montage. Deux typologies de problèmes distincts sont liées à l'ordonnement des véhicules [1].

Le *séquencement* : la constitution de la LUO est un problème statique de séquencement des ordres fermes de fabrication. Cette approche a été initiée par Toyota [2]. Elle cherche à respecter les contraintes de l'atelier montage tout en lissant la consommation des pièces [3, 4]. Le *cadencement* : c'est un problème dynamique conférant au système une meilleure réactivité. Une résolution par construction progressive en entrée de l'atelier de peinture (convois de teintes) et en entrée de l'atelier de montage (espacement) a été proposée [5].

D'autres travaux [6, 7] ont donné naissance à un algorithme de cadencement et de reséquencement permettant une prise en compte des contraintes de l'atelier aval tout en tentant de remettre en ordre la LUO. Le *cadencement reséquenceable*, consistant à définir, en fonction des perturbations que peut subir le flux, le cadencement maximal autorisé en entrée de chaque atelier, garantit la remise en ordre pour l'atelier de montage [8].

2 Aide à la décision pour les flux internes

Afin d'améliorer la qualité du flux des véhicules, l'idée est de combiner les deux approches complémentaires (séquencement et cadencement). Si le séquencement privilégie une vision globale des flux, il reste cependant prévisionnel et statique. Il ne permet donc pas la prise en compte des aléas de production. Le cadencement privilégie quant à lui la réactivité du système et les optimisations locales de chaque atelier, au détriment de l'optimisation globale du système.

2.1 Optimisation globale du flux des véhicules

Pour combiner ces deux approches, des travaux [9] ont consisté à prendre en compte la vision globale dans les phases de cadencement des flux. Ainsi dans cette approche, chaque algorithme dédié au cadencement doit prendre en compte les contraintes spécifiques de l'atelier auquel il est dédié, mais également les contraintes des ateliers en aval, ainsi

que l'ordre établi dans la phase de séquencement. L'originalité de cette approche réside dans la considération de toute l'usine terminale (fig. 2), de l'entrée ferrage jusqu'à la sortie montage, et non plus seulement d'un atelier [10].

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Pb'_{fer} \\ Pb'_{pei} \\ Pb'_{mon} \end{bmatrix}}_{Pb'} = \underbrace{\begin{bmatrix} CFF & CPF & CMF \\ 0 & CPP & CMP \\ 0 & 0 & CMM \end{bmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} Pb_{fer} \\ Pb_{pei} \\ Pb_{mon} \end{bmatrix}}_C + \underbrace{\begin{bmatrix} CLF \\ CLP \\ CLM \end{bmatrix}}_B \otimes Pb_{seq}$$

avec $\begin{cases} CFF + CPF + CMF + CLF = 100 \\ CPP + CMP + CLP = 100 \\ CMM + CLM = 100 \end{cases}$

Figure 2. Principe de l'optimisation globale.

Une fonction d'évaluation adaptée au problème est proposée. Cette fonction traduit aussi bien la prise en compte des contraintes locales que la satisfaction globale (respect de la LUO). L'utilisation d'un outil de simulation à événements discrets, incluant les logiques d'ordonnement locales (*branch and bound*), permet de simuler une configuration de la matrice d'interaction. Afin de déterminer la meilleure matrice d'interaction en fonction d'une liste de véhicule à produire et de la configuration des ateliers, plusieurs méta heuristiques ont été testées (recuit simulé, algorithmes génétiques, gradients, etc.). Des cas tests ont permis d'identifier les méthodes les plus prometteuses : les algorithmes génétiques. Cette application constitue donc un des éléments numériques centraux pour l'aide à la décision sur le flux véhicule.

2.2 Robustesse et réactivité aux aléas d'une usine terminale

La synchronisation des flux d'approvisionnement avec le flux des véhicules est extrêmement sensible aux aléas. Des travaux [11] ont eu pour objectif d'en diminuer l'impact afin d'assurer au mieux le respect des contraintes industrielles tout en assurant au mieux cette synchronisation. Ces travaux s'orientent autour de deux axes principaux.

- La *robustesse* : recherche de l'ordonnement le moins sensible aux perturbations du process de fabrication. La stratégie d'ordonnement la plus performante a été déterminée : le lissage des contraintes montage et la densification des teintes. Une comparaison de différentes méthodes d'optimisation mono et multi objectifs a permis de déterminer la meilleure heuristique et d'améliorer la construction du programme de fabrication (fig. 3).

- La *réactivité* : assurer le respect de la séquence prévisionnelle durant l'exécution de la production. Une étude terrain et des analyses statistiques ont permis de modéliser les perturbations et de les intégrer dans les outils de simulations existants.

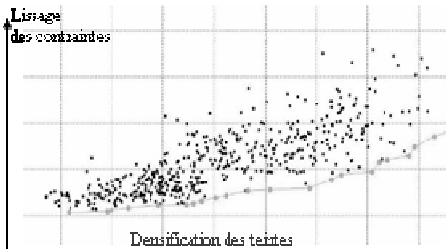


Figure 3. Front de Pareto des meilleures solutions pour constituer la séquence.

Ce nouveau module numérique basé sur le couplage RO/simulation permet de construire une séquence prévisionnelle robuste et réactive aux aléas.

2.3 Equilibrage sur les lignes de montage dans une usine terminale

Equilibrer une ligne de montage consiste à affecter les opérations d'assemblages aux postes de travail répartis le long de la ligne (fig. 4). La diversité des véhicules implique une diversité de la pénibilité des tâches à réaliser. Dès lors, la solution retournée par la résolution du problème de l'équilibrage influence directement la séquence de véhicules en entrée de la ligne ; l'équilibrage donne des ordres au séquençement en terme de succession de modèles.

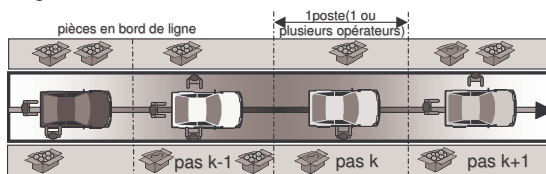


Figure 4. Représentation d'une ligne de montage.

Les travaux proposés dans le cadre de l'équilibrage doivent fournir un équilibrage admissible voire optimisé (minimisation du nombre de postes, minimisation du nombre de déplacements de gamme et lissage de la charge de travail) pour chaque période (nouvelle quantité et diversité de véhicule). Le problème de l'équilibrage a été formalisé mathématiquement [12], en y intégrant un grand nombre de contraintes. Plusieurs méthodes d'optimisation (heuristiques adaptées au problème) ont été spécifiées, codées et testées. Chaque heuristique répond à une contrainte particulière : le

chaînage de toutes ces techniques permet de répondre au problème global de l'équilibrage, en proposant une solution adaptée en fonction des contraintes industrielles. Dès lors, les travaux s'orientent vers l'intégration de ces techniques au sein d'un outil d'aide à la décision permettant la visualisation du résultat d'un équilibrage au poste.

3 Aide à la décision et logistique d'approvisionnement

Après avoir présenté un ensemble de contributions tendant à améliorer le flux interne, il est aujourd'hui nécessaire de mener des études visant à l'optimisation des flux externes. Aujourd'hui, sa complexité (volumétrie : 3500 à 5000 références, et diversité) rend difficile l'évaluation globale de sa performance. Ces travaux veulent contribuer à l'amélioration globale de la flexibilité de la logistique et de la réactivité face aux aléas d'approvisionnements.

Une modélisation des flux logistiques à des fins d'évaluation est proposée. Dans le cadre d'une approche systémique (fig. 5), un méta-modèle UML des flux est construit puis instancié sur la chaîne logistique d'approvisionnement PSA [13]. Pour spécifier à la fois les caractères statiques et dynamiques du système les différents diagrammes d'UML sont utilisés. Cette modélisation est implémentée dans une plateforme de simulation, *SimAppro*, de la logistique d'approvisionnement de PSA. Un système d'indicateurs a ensuite été développé pour évaluer la performance de la chaîne logistique. Ils reflètent la qualité de service (nombre de véhicules incomplets) et le coût de stockage.

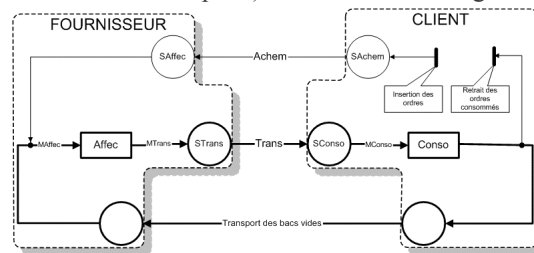


Figure 5. Représentation systémique d'un flux.

Enfin cette plateforme a été utilisée pour un cas d'application industriel. Il consiste à utiliser un couplage optimisation/simulation, afin d'adapter le niveau de sécurisation pour chaque composant sans altérer la qualité de service globale.

Pour ce faire, nous implémentons un algorithme

d'optimisation permettant de déterminer le meilleur paramétrage. La figure 6 exprime la cartographie de la configuration initiale et finale. Ces résultats obtenus par le biais de deux heuristiques simples (aspect décisionnel) couplés avec le simulateur *SimAppro* (évaluation) laissent à penser qu'il est possible de diminuer globalement les niveaux de sécurisation des stocks tout en améliorant la qualité de service.

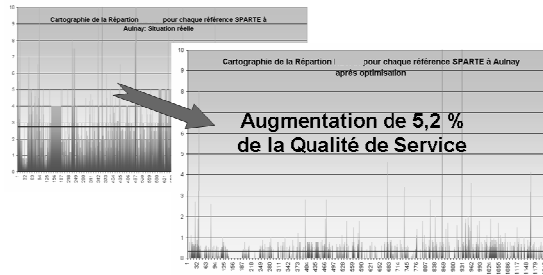


Figure 6. Cartographie des sécurisations : adaptation par optimisation.

4 Conclusion

Les travaux présentés dans cet article représentent l'aboutissement de plusieurs thèses menées en collaboration avec le groupe PSA. Toutes ont abouti au développement et au prototypage d'outils d'aide à la décision.

S'agissant du flux véhicule, deux principaux outils, aujourd'hui en phase d'industrialisation, ont permis de mieux maîtriser les fonctions de cadencement et de séquençement. En ce qui concerne l'équilibrage, le prototype proposant un équilibrage est en phase avancée de développement.

Concernant la logistique d'approvisionnement, le Groupe dispose désormais d'un outil de simulation. Il permet de jouer des scénarii, et de pouvoir qualifier et quantifier l'impact d'une prise de décision quant aux différents aléas survenant à la fois sur le flux véhicules et sur le flux constituants. Concernant les perspectives de recherche, deux axes majeurs ont été identifiés.

D'une part, concernant la logistique d'approvisionnement, les travaux s'orientent désormais sur l'extension des modèles de référence du simulateur *SimAppro*, pour la modélisation de nouvelles organisations logistiques. Ces outils pourront dès lors aider à la prise de décision, avec la prise en compte de l'aspect économique, pour l'orientation du groupe PSA-Peugeot-Citroën, en matière de mode de fonctionnement logistique.

Bibliographie

- [1] *Ordonnancement sur une ligne multimodèle*. Y. Frein, E. Castelain In Chapitre 8 de *Ordonnancement de la Production*, Hermès, 2001.
- [2] Toyota Production System. Y. Monden. *Institute of Industrial Engineers Press*, appendix 2 p181-192, 1983.
- [3] Aide au séquençement des produits sur une ligne de fabrication multi modèles. G. Comby. Thèse de doctorat, Lyon, 1996.
- [4] Level schedules for mixed-model assembly lines in just in time production system, J. Miltenburg. *Management Science*, Vol35, No2, p192-207, 1989.
- [5] Sur les Séquençements en unité de production automobile. F. Guerre-Chaley. Thèse de doctorat, Grenoble, 1995.
- [6] Gestion réactive des stocks intermédiaires d'un flux de production automobile. P. Baratou. Thèse de doctorat, Lille, 1998.
- [7] Séquençement des lignes d'assemblage à modèles mélangés, M. Delaval. Thèse de doctorat, Lille, 1997.
- [8] Sur une nouvelle politique de gestion de flux : le cadencement reséquençable. V. Bernier. Thèse de doctorat, Grenoble, 2000.
- [9] Contribution à la vision globale de l'ordonnancement du flux véhicule : Vers un outil d'aide à la décision. Application pour un grand constructeur automobile. E. Muhl. Thèse de doctorat, Nancy, 2002.
- [10] Quelques approches de pilotage distribué et leur formalisation. P. Charpentier *et al.* *JESA*, Vol 35 – n°7-8/2001, p. 885 à 904, 2001.
- [11] Parameters setting to solve a car sequencing problem considering paint and assembly shops constraints. A. Joly. *Project Management and Scheduling (PMS)*, Nancy, 2004.
- [12] Problème d'ordonnancement et d'affectation avec contraintes de ressources de type RCPSP et line balancing. C. Boutevin. Thèse de doctorat, Clermont-ferrand, 2003.
- [13] Modélisation et simulation de logistique d'approvisionnement dans l'industrie automobile – Application pour un grand constructeur. A. Villeminot. Thèse de doctorat, Nancy, 2004.

Article invité

L'Approche par Programmation Semidéfinie en Optimisation Combinatoire

Frédéric Roupin¹
roupin@iie.cnam.fr

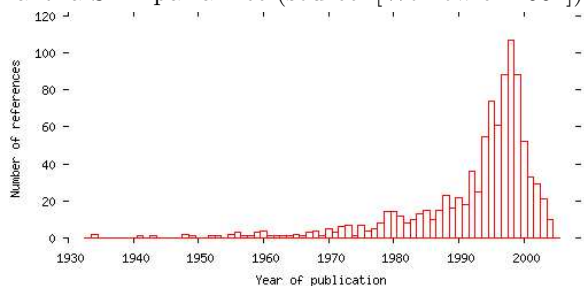
Résumé

La programmation semidéfinie est connue pour les avancées qu'elle a rendu possibles en approximation au pire cas de problèmes difficiles de l'optimisation combinatoire. Elle est également réputée comme une approche coûteuse en temps de calcul, et donc difficilement exploitable dans la pratique. Qu'en est-il réellement ? Cet article replace dans leur contexte un ensemble de références bibliographiques permettant de mieux appréhender ce domaine de recherche encore très jeune et actif.

semidéfinies, i.e. ne relevant pas d'une simple application «d'astuces». En effet, les relaxations semidéfinies proposées étaient la plupart du temps conçues «ex nihilo» en suivant une recette à la «Goemans-Williamson». Enfin, un goût certain pour l'ésotérisme dans quelques notations, et l'utilisation courante de variables bivalentes à valeurs dans $\{-1,1\}$ pour établir les modèles utilisés pour obtenir les relaxations SDP ne facilitaient ni la lecture ni la comparaison des différentes approches, pour la plupart des néophytes. Ce contexte représentait un obstacle certain pour la diffusion et l'utilisation pratique de cette approche (pour la résolution exacte ou approchée).

1 Introduction

La programmation semidéfinie (SDP) a provoqué un réel engouement dans la communauté de l'optimisation combinatoire après les fameux résultats de Goemans et Williamson concernant l'approximation du problème MAX-CUT [Goemans 1995]. Une série d'articles connexes est alors parue (par exemple [Karger et al 1994, Alon et Kahale 1995, Freize et Jerrum 1995]). Cette «explosion» est très visible sur la figure suivante qui donne le nombre de publications concernant la SDP par année (source : [Wolkowicz 2004]).



Ces résultats concernant l'approximation au pire cas, bien que remarquables, limitaient l'utilisation de la SDP au plan théorique car la résolution numérique des SDP restait très coûteuse en temps. D'autre part, il manquait des méthodes générales et systématiques pour l'élaboration de relaxations

Parallèlement à tous ces résultats théoriques sur l'approximation de problèmes difficiles, des progrès fulgurants furent accomplis dans le domaine des algorithmes de points intérieurs. Ainsi, les travaux de [Nesterov 1994, Alizadeh 1995] furent les premiers représentants de méthodes de plus en plus efficaces (voir Section 3). Grâce à ces nouveaux outils, plusieurs expérimentations numériques furent menées (par exemple [Zhao 1998]), conduisant à de meilleures bornes mais également à des méthodes exactes de résolution (par exemple [Cung Roupin 1999]). Plus récemment, des études ont comparé les différentes approches (linéaire, lagrangienne, semidéfinie) et les liens entre elles ont été clarifiés (voir Section 4). Enfin en revisitant les méthodes utilisées en programmation linéaire et en profitant de l'effet de «levier» de la contrainte (non linéaire) de positivité, plusieurs schémas ou algorithmes ont été élaborés pour construire des relaxations semidéfinies (voir Section 5).

¹CEDRIC-Institut d'Informatique d'Entreprise, 18 allée Jean Rostand 91025 Evry cedex, France

2 Qu'est-ce qu'un programme semidéfini ?

Le produit scalaire habituel sur S_n (espace des matrices symétriques réelles $n \times n$) est

$$(A, B) \in S_n^2 \rightarrow A \bullet B = \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$$

On peut ainsi réécrire toute forme quadratique $x^T Ax + b^T x + c$ comme $A \bullet xx^T + b^T x + c$, où $x \in \mathbb{R}^n$. On considère $S_n^+ = \{A : \forall z \in \mathbb{R}^n, z^T A z \geq 0\} \subset S_n$ l'ensemble des matrices (semidéfinies) positives. Pour $A \in S_n^+$ on écrit également $A \succeq 0$. Un programme semidéfini peut alors être défini comme la maximisation d'une fonction linéaire de $X \in S_n^+$ soumise à des contraintes linéaires :

$$(SDP) \begin{cases} \text{Max} & A_0 \bullet X \\ \text{s.c.} & A_i \bullet X = c_i \quad i = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0 \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^m$, et $A_i \in S_n \forall i \in \{0, \dots, m\}$. Le programme dual de (SDP) est :

$$(DSDP) \begin{cases} \text{Min} & c^T y \\ \text{s.c.} & F(y) = \sum_{i=1}^m A_i y_i - A_0 \succeq 0 \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

En fait, (DSDP) est également un programme semidéfini. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que les matrices s'écrivant $F(y) = \sum_{i=1}^m A_i y_i - A_0$ sont éléments de l'espace affine de repère (A_0, \dots, A_m) (la matrice $-A_0$ est donc l'origine, et les y_i les coordonnées de $F(y)$ dans la base). En décrivant cet espace par un ensemble de contraintes linéaires, on peut reformuler (DSDP) comme (SDP) (avec des matrices A_i et des vecteurs c_i différents bien sûr). La programmation semidéfinie peut être vue comme une généralisation de la programmation linéaire, puisque si toutes les matrices A_i pour $i \in \{0, \dots, m\}$ sont diagonales alors (SDP) et (DSDP) deviennent de simples programmes linéaires. On peut également vérifier que la programmation quadratique convexe est un cas particulier de la programmation semidéfinie.

3 Résoudre un programme semidéfini

Un des problèmes majeurs rencontrés lorsque l'on souhaite utiliser la programmation semidéfinie est l'absence d'outils numériques commerciaux éprouvés. Cela est dû en partie au fait que

l'élaboration de méthodes de résolution de SDP est un domaine de recherche récent et encore très actif. Il existe cependant à présent un certain nombre d'outils gratuits, mais qui réclament une certaine habitude et dont l'efficacité est variable suivant les problèmes traités [Borchers 1999, Sturm 1999, Helmberg 2000d, Burer Monteiro 2003, Tütüncü et al 2003].

Les premiers outils de résolution mettaient près d'une heure pour venir à bout d'une relaxation semidéfinie d'un MAXCUT d'un graphe de cinquante sommets. A présent, grâce à l'outil SB («Spectral Bundle method») [Helmberg 2000d], il est possible d'obtenir la valeur optimale du problème «had14» (QAP : affectation quadratique) en résolvant en moins de dix minutes sur un simple PC une relaxation semidéfinie [Roupin 2004] impliquant 19701 variables et 24851 contraintes. Des programmes comportant plus de 400000 variables et 450000 contraintes peuvent être traités en moins d'une journée (par exemple une relaxation semidéfinie de nug30, une instance bien connue d'affectation quadratique). SB est l'implémentation d'une méthode de sous-gradient [Helmberg 2000c] qui résout le dual de SDP dont la trace de la matrice est constante (et donc en fait bornée en introduisant une variable d'écart). Si la borne est très grande, la convergence peut être très lente et d'autres outils (comme CSDP, une méthode primal-dual) sont beaucoup plus efficaces.

De nombreuses expérimentations ont par conséquent été menées [Helmberg 2000a, Benson 2000, Anjos 2002, Helmberg 2003, Roupin 2004], et on peut trouver des études comparatives des différentes méthodes et logiciels existants (par exemple [Mittelman 2003]).

4 Approches lagrangienne et Semidéfinie

Le lien entre relaxations lagrangienne et semidéfinie est clairement établi dans [Poljak 1995]. D'autre part, dans [Lemarechal 1999] il est démontré (entre autres) que les relaxations semidéfinies proposées dans [Goemans 1995] pour le problème MAX-CUT peuvent être obtenues en dualisant n contraintes $x_i^2 = 1$, une formulation naturelle des contraintes de bivalence $x_i \in \{-1, 1\}$ présentes dans un modèle du problème. Dans ce même article, les auteurs établissent le lien entre relaxation lagrangienne partielle d'un programme quadratique en 0-1 (les contraintes linéaires sont maintenues) et programmes semidéfinis. Ce

lien peut être étendu [Faye Roupin 2004b] au cas plus général d'un problème quadratique quelconque (x n'étant donc pas nécessairement booléen) : le dual d'une relaxation lagrangienne partielle (les contraintes linéaires sont maintenues) peut être également formulé comme un programme semidéfini avec cependant plus de contraintes que dans le cas booléen. Dans ce dernier cas, les deux SDP sont équivalents, mais il existe un point admissible de la relaxation lagrangienne correspondant à la relaxation semidéfinie présentée dans [Faye Roupin 2004b] qui atteint la valeur optimale. Ceci influence fortement les temps de résolution des programmes semidéfinis correspondants. Une meilleure compréhension des liens entre les deux approches a donc des conséquences directes sur le plan pratique.

5 Construire une relaxation semidéfinie

L'article fondateur de Goemans-Williamson a influencé de nombreux auteurs. L'idée de base de cette approche est de remplacer chacune des n variables (à valeur dans $\{-1, 1\}$) du modèle discret initial par un vecteur unitaire v_i . L'interprétation géométrique de la matrice $Y = V^T V$ (variable du SDP) comme la donnée de ce champ de vecteurs $V = [v_1, \dots, v_n]$ de la sphère unité a conduit à l'élaboration de plusieurs algorithmes avec garanties de performance. La relaxation SDP peut également être vue comme une relaxation sur le rang de la matrice $Y = V^T V$ (qui vaut 1 avant relaxation). Le problème technique de la représentation des termes linéaires dans ce SDP est simplement résolu en ajoutant un vecteur de référence v_0 (uniquement contraint à être de norme 1), et donc une ligne et une colonne à la matrice Y (les produits scalaires $v_0^T v_i$). Bien que fertile pour construire des algorithmes approchés, cette approche est en fait équivalente à celle proposée dans [Shor 1987, Lovasz 1991] puis dans [Poljak 1995], où un modèle plus «classique» en variables booléennes (à valeurs dans $\{0, 1\}$) est défini. En effet, les relaxations semidéfinies issues de ces deux approches sont équivalentes [Laurent 1997]. Le passage de l'une à l'autre étant simplement obtenu en utilisant l'automorphisme $X \rightarrow QXQ^T$ de S_n^+ , où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}e_n & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix}$ (e_n est le vecteur dont tous les éléments valent 1) [Helmberg 2000b]. On peut en particulier établir les formulations correspondantes des contraintes de linéarisation standard dans les

deux modèles (i, j et k sont dans $\{1, \dots, n\}$) :

modèle $\{-1, 1\}$	modèle $\{0, 1\}$
$Y_{0i} + Y_{0j} + Y_{ij} \geq -1$	$X_{ij} \geq 0$
$Y_{ij} - Y_{i0} - Y_{j0} \geq -1$	$x_i + x_j \leq 1 + X_{ij}$
$Y_{i0} - Y_{j0} - Y_{ij} \geq -1$	$X_{ij} \leq x_i$
$-Y_{i0} + Y_{j0} - Y_{ij} \geq -1$	$X_{ij} \leq x_j$

Plusieurs «recettes» ont été proposées pour améliorer ces relaxations semidéfinies [Lemarechal 1999, Helmberg 2000b, Lasserre 2002a], ainsi que des comparaisons entre les différents schémas existants [Lasserre 2000b, Laurent 2003]. D'autre part, dans [Roupin 2004], un algorithme est proposé pour construire des relaxations semidéfinies à partir de n'importe quelle relaxation linéaire. Les avantages principaux de cette démarche sont de garantir l'obtention d'une relaxation SDP plus efficace que la relaxation PL servant à la construire, et de profiter de toute l'expérience accumulée dans le domaine de la programmation linéaire afin d'identifier des coupes efficaces. Des résultats théoriques et numériques sont présentés pour les problèmes suivants : l'affectation quadratique (QAP), la recherche d'un sous-graphe dense (k-cluster), et un problème de placement de tâches dans un système distribué avec contraintes de ressources. Enfin, grâce au caractère algorithmique de cette démarche, un modèleur automatique a été développé (*SDP_S*), et est disponible sur le site <http://semidef.free.fr> [SDPS 2003], la résolution numérique des programmes semidéfinis obtenus étant prise en charge par SB [Helmberg 2000d].

6 Coupes et approche semidéfinie

Un autre domaine très actif actuellement est l'utilisation de coupes pour améliorer les bornes mais également les temps de résolution des relaxations semidéfinies existantes. Ainsi, plusieurs articles présentent des résultats d'expérimentations numériques issus de cette démarche. Par exemple, dans [Helmberg, 2001] un algorithme de coupe utilisant les inégalités de cycles de longueur impaire est décrit pour les problèmes MAXCUT, EQUICUT et celui de la bisection d'un graphe. Dans [Faye Roupin 2004a], nous avons amélioré les bornes obtenues dans [Roupin 2004] (ainsi que diminué les temps de calcul de 60 à 80%), en ajoutant à une relaxation semidéfinie du QAP (affectation quadratique) des coupes appartenant aux familles présentées dans [Blanchard et al 2000]. Il existe

également un article de synthèse sur les différentes tentatives SDP+coupes [Mitchell 2002]. Des coupes non linéaires (en fait quadratiques convexes) ont été présentées dans [Iyengar, 2001b], et des techniques généralisant celles de «lift-and-project» de la programmation linéaire [Adams 1990, Lovasz 1991, Balas 1993] ont été explorées dans [Iyengar 2001a] (toujours avec l'objectif d'engendrer des coupes pour des SDP).

7 Conclusion

D'un point de vue théorique, la SDP a permis d'améliorer significativement les résultats sur l'approximation de nombreux problèmes. Sur le plan pratique, il est à présent possible de résoudre des programmes semidéfinis de taille moyenne et même grande pour des instances suffisamment «creuses» (voir section 3). Cependant, il est clair que l'approche semidéfinie doit être réservée au traitement de problèmes très difficiles, en particulier pour ceux où la programmation linéaire est inefficace. En effet, le gain obtenu sur la borne doit compenser la perte de temps provoquée par la résolution d'un SDP. Cependant, les derniers progrès des outils numériques et l'utilisation de relaxations SDP de plus en plus élaborées montrent que cette approche est dorénavant tout à fait exploitable dans la pratique, et ceci même dans le cadre de la résolution exacte de certains problèmes.

Références

- [Adams 1990] W.P. Adams et H.D. Sherali, "A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations of zero-one programming problems", *SIAM J. Disc. Math* 3, pp. 411-430, 1990.
- [Alizadeh 1995] F. Alizadeh "Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization", *SIAM J. Optim.*, 5(1), pp. 13-51, 1995.
- [Alon et Kahale 1995] N. Alon et N. Kahale, "Approximating the independence number via the theta-function" Technical report, Tel Aviv University, Israel.
- [Anjos 2002] M. F. Anjos. "An Improved Semidefinite Programming Relaxation for the Satisfiability Problem", Technical Report UW-E&CE#2002-09, University of Waterloo, Canada, June 2002.
- [Balas 1993] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuejols, "A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs". *Math. Prog. A* 58 pp. 295-323, 1993.
- [Benson 2000] S. Benson, Y. Ye, X. Zhang, "Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization" *SIAM J. Optim.*, 10(2), pp. 443-461, 2000.
- [Blanchard et al 2000] A. Blanchard, S. Elloumi, A. Faye, N. Wicker. "Un algorithme de coupes pour l'Affectation Quadratique". In Proceedings FRANCO III, Québec, Canada Mai 2001.
- [Burer Monteiro 2003] S. Burer, R.D. Monteiro, "A nonlinear programming algorithm for solving semidefinite programs via low-rank factorization." *Math Prog.* 95(2), pp 329-357, 2003.
- [Borchers 1999] Brian Borchers. CSDP, A C Library for Semidefinite Programming. *Optimization Methods and Software* 11(1) :613-623, 1999. <http://www.nmt.edu/borchers/csdp.html>
- [Cung Roupin 1999] Van Dat Cung et Frédéric Roupin, "A Parallel Branch-and-Bound Algorithm using a Semidefinite Programming Relaxation for the Vertex-Cover Problem" In Proceedings of ECCO XII, Bandol, France, 1999.
- [Faye Roupin 2004a] A.Faye et F.Roupin, "A lower bound for the Quadratic Assignment Problem based upon a semidefinite relaxation and a cutting planes approach" In Proceedings ECCO 2004, June 24-26, Beirut, Lebanon, 2004.
- [Faye Roupin 2004b] A. Faye, F. Roupin, "Partial Lagrangian and Semidefinite relaxations of Quadratic Programs". Rapport technique CEDRIC No 673, 2004. <http://cedric.cnam.fr>.
- [Freize et Jerrum 1995] A. Frieze et M. Jerrum. Improved approximation algorithms for MAX k-CUT and MAX BISECTION. IPCO IV Proc., LNCS 920, Springer 1995, pp. 1-13.
- [Goemans 1995] M.X. Goemans, S.P. Williamson, "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming" *Journal of the ACM* 42(6) :1115-1145, 1995.
- [Helmberg 1998] C. Helmberg, F. Rendl. Solving quadratic (0,1)-problems by semidefinite programs and cutting planes" *Math. Programming*, 82(3, Serie A), pp. 291-315, 1998.
- [Helmberg 2000a] C. Helmberg, F. Rendl, et R. Weismantel, "A Semidefinite Programming Approach to the Quadratic Knapsack Problem" *J. of Comb. Opt.* Vol. 4 pp. 197-215, 2000.

- [Helmberg 2000b] C. Helmberg, "Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization, Habilitationsschrift" ZIB-report ZR-00-34, KZZI, Takustrasse 7, 14195 Berlin, Germany, 2000.
- [Helmberg 2000c] C. Helmberg, F. Rendl, "A spectral bundle method for semidefinite programming" *SIAM J. Optim.* 10(3) :673-696, 2000.
- [Helmberg 2000d] C. Helmberg, "A C++ implementation of the Spectral Bundle Method", Manual version 1.1.1. <http://www-user.tu-chemnitz.de/helmberg/SBmethod/>.
- [Helmberg, 2001] C. Helmberg, "Cutting planes algorithm for large scale semidefinite relaxations". ZIB-Report ZR 01-26, KZZI, Takustraße 7, 14195 Berlin, Germany, 2001.
- [Helmberg 2003] C. Helmberg, "Numerical Evaluation of SBmethod", *Math Prog.* 95(2), pp 381-406, 2003.
- [Iyengar 2001a] G. Iyengar et M. T. Cezik, "Cutting planes for mixed 0-1 mixed semidefinite programs." *Integer and Combinatorial Optimization*, LNCS 2081, pp. 251-263, 2001.
- [Iyengar, 2001b] G. Iyengar, "Quadratic cuts for mixed 0-1 quadratic programs", Technical report, IEOR Dept., Columbia University, 2001.
- [Karger et al 1994] D. Karger, R. Motwani, et M. Sudan. Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming. FOCS'94, pp. 2-13, 1994.
- [Lasserre 2002a] J.B. Lasserre, "An Explicit Exact SDP Relaxation for Nonlinear 0-1 Programs" *SIAM J. Optim.* 12, pp. 756-769 2002.
- [Lasserre 2000b] J.B. Lasserre, "Semidefinite programming vs. LP relaxations for polynomial programming" *Math. Oper. Res.* 27(2) :347-360, 2002.
- [Laurent 1997] M. Laurent, S. Poljak, et F. Rendl, "Connections between semidefinite relaxations of the max-cut and stable set Problems" *Mathematical Programming* 77 pp. 225-246, 1997.
- [Laurent 2003] M. Laurent, "A comparison of the Sherali-Adams, Lovász-Schrijver and Lasserre relaxations for 0-1 programming" *Mathematics of Oper. Res.* 28, pp. 470-496, 2003.
- [Lemarechal 1999] C. Lemarechal et F. Oustry, "Semidefinite relaxations and Lagrangian duality with application to combinatorial optimization", RR-3710, INRIA Rhone-Alpes, ZIRST - 655 avenue de l'Europe, F-38330 Montbonnot Saint-Martin, June 1999.
- [Lovasz 1991] L. Lovász, A. Schrijver, "Cones of matrices and set functions and 0-1 optimization", *SIAM J. on Optimization* Vol. 1 pp. 166-190, 1991.
- [Mitchell 2002] J. E. Mitchell, K. Krishnan, "Cutting plane methods for semidefinite programming", Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, NY 12180 USA, 2002.
- [Mittelmann 2003] Hans D. Mittelmann, "An Independent Benchmarking of SDP and SOCP Solvers" *Math Prog.* 95(2), pp. 407-430, 2003. <http://plato.asu.edu/bench.html>.
- [Nesterov 1994] Y. Nesterov, A. Nemirovski, "Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming" *SIAM Studies in Applied Mathematics* Philadelphia, 1994.
- [Poljak 1995] S. Poljak, F. Rendl, H. Wolkowicz, "A recipe for semidefinite relaxation for (0,1)-quadratic programming" *Journal of Global Optimization* Vol. 7, pp. 51-73, 1995.
- [Roupin 2004] F. Roupin, "From Linear to Semidefinite Programming : an Algorithm to obtain Semidefinite Relaxations for Bivalent Quadratic Problems" *Journal of Combinatorial Optimization* vol. 8(4), pp. 469-493, 2004.
- [SDPS 2003] G. Delaporte, S. Jouteau, F. Roupin, "SDP_S : a Tool to formulate and solve Semidefinite relaxations for Bivalent Quadratic problems", In Proceedings ROADEF 2003, Avignon 26-28 Février, 2003. <http://semidef.free.fr>.
- [Shor 1987] N.Z. Shor, "Quadratic optimization problems." *Soviet Journal of computer Systems Sciences* 25, pp 1-11, 1987.
- [Sturm 1999] J.F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones" *Optimization Methods and Software* 11, pp. 625-653, 1999.
- [Tütüncü et al 2003] Reha H. Tütüncü, K. C. Toh, Michael J. Todd, "Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3" *Math Prog.* Vol 95(2) pp 189-217, 2003.
- [Wolkowicz 2004] Henry Wolkowicz, "A Bibliography on Semidefinite Programming" <http://linwww.ira.uka.de/bibliography/Math/>.
- [Zhao 1998] Q. Zhao, S.E. Karish, F. Rendl, et H. Wolkowicz. "Semidefinite programming relaxations for the quadratic assignment problem". *J. of Comb. Opt.* 2(1) :71-109, 1998.

Article invité

Phénomènes de seuil ou transitions de phase dans les problèmes combinatoires

Olivier Dubois, Jacques Mandler¹

{Olivier.Dubois, Jacques.Mandler}@lip6.fr

Introduction.

Informellement, un système présente une transition de phase si une faible action sur l'un de ses paramètres entraîne un changement important des propriétés qui intéressent l'observateur. Ces paramètres modifiables depuis l'extérieur s'appellent paramètres de contrôle, et la valeur au passage de laquelle s'effectue la transition s'appelle seuil ou valeur critique.

Les systèmes auxquels nous nous intéressons sont gouvernés par des lois probabilistes, et nous examinons leurs propriétés limites lorsque leur taille augmente indéfiniment.

Comme nous le verrons, on distingue deux types de transition, les « *coarse* » (douces ou faibles) et les « *sharp* » (brusques ou fortes). La présence des premières va souvent presque de soi, les secondes en revanche traduisent une influence profonde du paramètre concerné sur le comportement du système, et potentiellement exploitables en pratique pour la résolution des problèmes modélisés.

Le double vocabulaire, physique et mathématico-informatique, vient des exemples historiques. Du côté physique il s'agissait d'abord du développement de la mécanique statistique (systèmes de molécules, puis particules chargées). Il n'est pas besoin d'insister : transition eau-glace avec la température comme paramètre de contrôle, etc. La théorie de la percolation aussi s'occupe au premier chef de phénomènes critiques. Le vocabulaire mathématico-informatique, vient de la modélisation des machines tolérantes aux pannes, puis de l'introduction des graphes aléatoires par Erdős et Rényi et leurs résultats sur les seuils de la composante géante et de la connexité notamment.

Il est question ici d'un développement récent en informatique, bien distinct des précédents et potentiellement d'une portée bien plus grande : l'émergence, depuis une quinzaine d'années, des transitions de phase dans l'étude des problèmes combinatoires. Ce qui est remarquable entre autres, et qui occasionne certains espoirs pour l'avenir, c'est que les transitions de phase mises en évidence dans

des recherches de plus en plus nombreuses, sont largement du type *sharp*, celles qui indiquent vraiment que l'on se rapproche de la structure profonde des problèmes. Et les problèmes concernés sont d'importance évidente pour tous, englobant des classes de problèmes NP-complets de plus en plus larges, les CSP (problèmes de satisfaction de contraintes), les plus emblématiques aussi *k*-SAT et ses variantes, le coloriage de graphes...

Une autre grande nouveauté est la multidisciplinarité désormais très réelle de ces recherches. Beaucoup des résultats les plus avancés sont le fait de physiciens qui trouvent là un domaine d'application pour les techniques élaborées de la mécanique statistique, de façon beaucoup plus convaincante que les premières tentatives d'il y a 20 ans sur le problème du voyageur de commerce.

Malgré cela, le domaine reste à ses tout débuts ; la théorie rigoureuse, en particulier, reste très en retard sur l'expérimentation et sur les calculs non rigoureux des physiciens. Peu de seuils sont connus exactement, ou même ont leur existence établie en toute rigueur ; et ce au prix d'années d'efforts à l'aide de méthodes classiques dans leur principe, mais techniquement difficiles et qu'il faut appliquer avec un maximum de subtilité à chaque cas spécifique.

Donnons un peu plus précisément l'idée d'un phénomène de seuil ou de transition de phase dans un problème combinatoire.

Un exemple simple.

L'exemple de transition de phase présenté ici n'est pas classique, mais il a l'avantage d'être immédiatement accessible. Il vient de l'algèbre de base que tout le monde connaît. Cet exemple montre que dans les problèmes qui peuvent être manipulés communément, on peut mettre en évidence le type de phénomènes qui nous intéresse dans cet article, simplement avec une vision nouvelle.

Notre exemple concerne la décomposition additive d'un ensemble fini d'entiers. Considérons l'ensemble $\{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$. On dit qu'il se décompose

¹LIP6, C.N.R.S.-Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

en la somme de $\{0, 2\}$ et $\{0, 3, 7\}$ selon la Table 1 d'addition élémentaire :

+	0	2
0	0	2
3	3	5
7	7	9

+	0	2	4
0	0	2	4
3	3	5	7
7	7	9	11

Table 1

Table 2

Cette décomposition est strictement non redondante. La décomposition de $\{0, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$ en $\{0, 2, 4\}$ et $\{0, 3, 7\}$ en revanche ne l'est pas car on retrouve deux fois l'entier 7 dans la Table 2.

Les décompositions non redondantes sont encore appelées décompositions de Minkowski ou polynômes de Minkowski. Elles servent à factoriser des polynômes à coefficients dans $\{0, 1\}$. Ainsi pour l'ensemble ci-dessus on a : $(1 + x^3 + x^2 + x^5 + x^7 + x^9) = (1 + x^2)(1 + x^3 + x^7)$. Les décompositions redondantes peuvent servir à factoriser des polynômes à coefficients sur des corps finis. De nombreuses études algébriques ont été consacrées à établir des conditions particulières de décomposabilité ou à étudier des types spécifiques de décomposabilité. Le point de vue adopté dans l'étude des transitions de phase est tout au contraire global. De manière informelle, la question posée est : existe-t-il un paramètre dit de contrôle qui selon sa valeur, influence de manière déterminante la décomposabilité du plus grand nombre possible d'ensembles d'entiers. C'est en quelque sorte un résultat statistique ou se plaçant d'un point de vue formel, un résultat probabiliste. Pour ce faire, on considère de manière uniforme tous les sous ensembles possibles des n premiers entiers noté $[n]$. Puis on cherche à mettre en évidence un paramètre de ces sous-ensembles de telle sorte que pour une valeur précise presque tous les sous ensembles passe brutalement d'un état où ils étaient décomposables à un état où ils ne sont plus décomposables ou l'inverse. Pour mettre en évidence un tel paramètre on n'a pas d'autre moyen que d'essayer de deviner un bon candidat. On s'aide habituellement d'expérimentations qui permettent de chercher par tâtonnant jusqu'à voir apparaître un phénomène de seuil ou transition sur un tracé graphique. C'est typiquement le cas dans le deuxième exemple qui sera décrit après. Ce n'est pas le cas dans le présent exemple pour des raisons de vitesse de convergence. Mais l'expérience montre que pour les quelques cas connus de transition de phase le paramètre est simple. Pour les sous ensembles de $[n]$ le plus simple est d'abord de considérer le nombre d'entiers absents, qu'on note ici H , de la suite $0, \dots, n$. Il faut alors choisir l'échelle à laquelle les variations de H doivent

être étudié. Il s'agit concrètement de déterminer à quel ordre de grandeur, i.e. quelle fonction de la taille n , les variations de H doivent être prises en compte pour voir apparaître un phénomène de seuil s'il en existe un. Dans le cas où l'échelle n'est pas indiquée par des expérimentations, son choix peut être très difficile. Pour cette raison le problème général de décomposabilité a dû être restreint au problème de la p -décomposabilité, c'est à dire où l'un des deux sous ensembles de décompositions a un nombre fixé p d'entiers. Seul le cas $p = 2$ a pu être entièrement résolu [6]. Pour p quelconque une conjecture a été avancée. Notons ici la difficulté majeure qui se pose dans l'étude des transitions de phase. Pour pouvoir espérer établir qu'il existe une transition de phase et plus précisément la localiser, il faut en pratique connaître à l'avance le paramètre de contrôle. On comprend alors l'importance du travail expérimental s'il est bien sûr faisable. Enonçons le résultat pour la 2-décomposabilité.

Theorem 1 Soit l'ensemble I obtenu en supprimant aléatoirement H entiers de $[n]$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(I \text{ est } 2\text{-décomposable}) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \overline{\lim} \frac{H}{\sqrt{1/2} n \ln n} < 1 \\ 0 & \text{si } \underline{\lim} \frac{H}{\sqrt{1/2} n \ln n} \geq 1 \end{cases}$$

Ce qui signifie que pour presque tout ensemble de $[n]$, en comptant le nombre d'entiers absents H rapporté à l'échelle $\sqrt{n \ln n}$ on peut décider s'il est décomposable ou non décomposable en comparant à la valeur $\sqrt{1/2}$

Le résultat de 2-décomposabilité peut paraître bien limité, pourtant il nécessite de faire appel à des techniques sophistiquées utilisant par exemple intensivement des grandes déviations dans leur développement les plus évolués. Pour la p -décomposabilité on conjecture que l'échelle ou apparaîtrait un phénomène de seuil serait $n^{1-1/p}(\ln n/p)^{1/p}$.

Transition de phase et complexité : le problème de Satisfaisabilité.

Il s'agit, bien sûr, du problème NP-complet prototype. Une formule k -CNF, construite sur un ensemble V de variables booléennes, est une suite ω de clauses, chacune étant un ensemble de k littéraux de la forme x ou \bar{x} avec $x \in V$. Une affectation $\gamma : V \rightarrow \{0, 1\}$ satisfait une clause si elle met au moins un de ses littéraux à 1, en convenant que $\gamma(\bar{x}) = 1 - \gamma(x)$. On dit que γ est une solution de ω , ou satisfait ω , si γ satisfait chaque clause de ω . Dans

2 Qu'est-ce qu'un programme semidéfini ?

Le produit scalaire habituel sur S_n (espace des matrices symétriques réelles $n \times n$) est

$$(A, B) \in S_n^2 \rightarrow A \bullet B = \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$$

On peut ainsi réécrire toute forme quadratique $x^T Ax + b^T x + c$ comme $A \bullet xx^T + b^T x + c$, où $x \in \mathbb{R}^n$. On considère $S_n^+ = \{A : \forall z \in \mathbb{R}^n, z^T A z \geq 0\} \subset S_n$ l'ensemble des matrices (semidéfinies) positives. Pour $A \in S_n^+$ on écrit également $A \succeq 0$. Un programme semidéfini peut alors être défini comme la maximisation d'une fonction linéaire de $X \in S_n^+$ soumise à des contraintes linéaires :

$$(SDP) \begin{cases} \text{Max} & A_0 \bullet X \\ \text{s.c.} & A_i \bullet X = c_i \quad i = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0 \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^m$, et $A_i \in S_n \forall i \in \{0, \dots, m\}$. Le programme dual de (SDP) est :

$$(DSDP) \begin{cases} \text{Min} & c^T y \\ \text{s.c.} & F(y) = \sum_{i=1}^m A_i y_i - A_0 \succeq 0 \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

En fait, (DSDP) est également un programme semidéfini. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que les matrices s'écrivant $F(y) = \sum_{i=1}^m A_i y_i - A_0$ sont éléments de l'espace affine de repère (A_0, \dots, A_m) (la matrice $-A_0$ est donc l'origine, et les y_i les coordonnées de $F(y)$ dans la base). En décrivant cet espace par un ensemble de contraintes linéaires, on peut reformuler (DSDP) comme (SDP) (avec des matrices A_i et des vecteurs c_i différents bien sûr). La programmation semidéfinie peut être vue comme une généralisation de la programmation linéaire, puisque si toutes les matrices A_i pour $i \in \{0, \dots, m\}$ sont diagonales alors (SDP) et (DSDP) deviennent de simples programmes linéaires. On peut également vérifier que la programmation quadratique convexe est un cas particulier de la programmation semidéfinie.

3 Résoudre un programme semidéfini

Un des problèmes majeurs rencontrés lorsque l'on souhaite utiliser la programmation semidéfinie est l'absence d'outils numériques commerciaux éprouvés. Cela est dû en partie au fait que

l'élaboration de méthodes de résolution de SDP est un domaine de recherche récent et encore très actif. Il existe cependant à présent un certain nombre d'outils gratuits, mais qui réclament une certaine habitude et dont l'efficacité est variable suivant les problèmes traités [Borchers 1999, Sturm 1999, Helmberg 2000d, Burer Monteiro 2003, Tütüncü et al 2003].

Les premiers outils de résolution mettaient près d'une heure pour venir à bout d'une relaxation semidéfinie d'un MAXCUT d'un graphe de cinquante sommets. A présent, grâce à l'outil SB («Spectral Bundle method») [Helmberg 2000d], il est possible d'obtenir la valeur optimale du problème «had14» (QAP : affectation quadratique) en résolvant en moins de dix minutes sur un simple PC une relaxation semidéfinie [Roupin 2004] impliquant 19701 variables et 24851 contraintes. Des programmes comportant plus de 400000 variables et 450000 contraintes peuvent être traités en moins d'une journée (par exemple une relaxation semidéfinie de nug30, une instance bien connue d'affectation quadratique). SB est l'implémentation d'une méthode de sous-gradient [Helmberg 2000c] qui résout le dual de SDP dont la trace de la matrice est constante (et donc en fait bornée en introduisant une variable d'écart). Si la borne est très grande, la convergence peut être très lente et d'autres outils (comme CSDP, une méthode primal-dual) sont beaucoup plus efficaces.

De nombreuses expérimentations ont par conséquent été menées [Helmberg 2000a, Benson 2000, Anjos 2002, Helmberg 2003, Roupin 2004], et on peut trouver des études comparatives des différentes méthodes et logiciels existants (par exemple [Mittelman 2003]).

4 Approches lagrangienne et Semidéfinie

Le lien entre relaxations lagrangienne et semidéfinie est clairement établi dans [Poljak 1995]. D'autre part, dans [Lemarechal 1999] il est démontré (entre autres) que les relaxations semidéfinies proposées dans [Goemans 1995] pour le problème MAX-CUT peuvent être obtenues en dualisant n contraintes $x_i^2 = 1$, une formulation naturelle des contraintes de bivalence $x_i \in \{-1, 1\}$ présentes dans un modèle du problème. Dans ce même article, les auteurs établissent le lien entre relaxation lagrangienne partielle d'un programme quadratique en 0-1 (les contraintes linéaires sont maintenues) et programmes semidéfinis. Ce

lien peut être étendu [Faye Roupin 2004b] au cas plus général d'un problème quadratique quelconque (x n'étant donc pas nécessairement booléen) : le dual d'une relaxation lagrangienne partielle (les contraintes linéaires sont maintenues) peut être également formulé comme un programme semidéfini avec cependant plus de contraintes que dans le cas booléen. Dans ce dernier cas, les deux SDP sont équivalents, mais il existe un point admissible de la relaxation lagrangienne correspondant à la relaxation semidéfinie présentée dans [Faye Roupin 2004b] qui atteint la valeur optimale. Ceci influence fortement les temps de résolution des programmes semidéfinis correspondants. Une meilleure compréhension des liens entre les deux approches a donc des conséquences directes sur le plan pratique.

5 Construire une relaxation semidéfinie

L'article fondateur de Goemans-Williamson a influencé de nombreux auteurs. L'idée de base de cette approche est de remplacer chacune des n variables (à valeur dans $\{-1, 1\}$) du modèle discret initial par un vecteur unitaire v_i . L'interprétation géométrique de la matrice $Y = V^T V$ (variable du SDP) comme la donnée de ce champ de vecteurs $V = [v_1, \dots, v_n]$ de la sphère unité a conduit à l'élaboration de plusieurs algorithmes avec garanties de performance. La relaxation SDP peut également être vue comme une relaxation sur le rang de la matrice $Y = V^T V$ (qui vaut 1 avant relaxation). Le problème technique de la représentation des termes linéaires dans ce SDP est simplement résolu en ajoutant un vecteur de référence v_0 (uniquement contraint à être de norme 1), et donc une ligne et une colonne à la matrice Y (les produits scalaires $v_0^T v_i$). Bien que fertile pour construire des algorithmes approchés, cette approche est en fait équivalente à celle proposée dans [Shor 1987, Lovasz 1991] puis dans [Poljak 1995], où un modèle plus «classique» en variables booléennes (à valeurs dans $\{0, 1\}$) est défini. En effet, les relaxations semidéfinies issues de ces deux approches sont équivalentes [Laurent 1997]. Le passage de l'une à l'autre étant simplement obtenu en utilisant l'automorphisme $X \rightarrow QXQ^T$ de S_n^+ , où $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}e_n & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix}$ (e_n est le vecteur dont tous les éléments valent 1) [Helmberg 2000b]. On peut en particulier établir les formulations correspondantes des contraintes de linéarisation standard dans les

deux modèles (i, j et k sont dans $\{1, \dots, n\}$) :

modèle $\{-1, 1\}$	modèle $\{0, 1\}$
$Y_{0i} + Y_{0j} + Y_{ij} \geq -1$	$X_{ij} \geq 0$
$Y_{ij} - Y_{i0} - Y_{j0} \geq -1$	$x_i + x_j \leq 1 + X_{ij}$
$Y_{i0} - Y_{j0} - Y_{ij} \geq -1$	$X_{ij} \leq x_i$
$-Y_{i0} + Y_{j0} - Y_{ij} \geq -1$	$X_{ij} \leq x_j$

Plusieurs «recettes» ont été proposées pour améliorer ces relaxations semidéfinies [Lemarechal 1999, Helmberg 2000b, Lasserre 2002a], ainsi que des comparaisons entre les différents schémas existants [Lasserre 2000b, Laurent 2003]. D'autre part, dans [Roupin 2004], un algorithme est proposé pour construire des relaxations semidéfinies à partir de n'importe quelle relaxation linéaire. Les avantages principaux de cette démarche sont de garantir l'obtention d'une relaxation SDP plus efficace que la relaxation PL servant à la construire, et de profiter de toute l'expérience accumulée dans le domaine de la programmation linéaire afin d'identifier des coupes efficaces. Des résultats théoriques et numériques sont présentés pour les problèmes suivants : l'affectation quadratique (QAP), la recherche d'un sous-graphe dense (k-cluster), et un problème de placement de tâches dans un système distribué avec contraintes de ressources. Enfin, grâce au caractère algorithmique de cette démarche, un modèleur automatique a été développé (*SDP_S*), et est disponible sur le site <http://semidef.free.fr> [SDPS 2003], la résolution numérique des programmes semidéfinis obtenus étant prise en charge par SB [Helmberg 2000d].

6 Coupes et approche semidéfinie

Un autre domaine très actif actuellement est l'utilisation de coupes pour améliorer les bornes mais également les temps de résolution des relaxations semidéfinies existantes. Ainsi, plusieurs articles présentent des résultats d'expérimentations numériques issus de cette démarche. Par exemple, dans [Helmberg, 2001] un algorithme de coupe utilisant les inégalités de cycles de longueur impaire est décrit pour les problèmes MAXCUT, EQUICUT et celui de la bisection d'un graphe. Dans [Faye Roupin 2004a], nous avons amélioré les bornes obtenues dans [Roupin 2004] (ainsi que diminué les temps de calcul de 60 à 80%), en ajoutant à une relaxation semidéfinie du QAP (affectation quadratique) des coupes appartenant aux familles présentées dans [Blanchard et al 2000]. Il existe

également un article de synthèse sur les différentes tentatives SDP+coupes [Mitchell 2002]. Des coupes non linéaires (en fait quadratiques convexes) ont été présentées dans [Iyengar, 2001b], et des techniques généralisant celles de «lift-and-project» de la programmation linéaire [Adams 1990, Lovasz 1991, Balas 1993] ont été explorées dans [Iyengar 2001a] (toujours avec l'objectif d'engendrer des coupes pour des SDP).

7 Conclusion

D'un point de vue théorique, la SDP a permis d'améliorer significativement les résultats sur l'approximation de nombreux problèmes. Sur le plan pratique, il est à présent possible de résoudre des programmes semidéfinis de taille moyenne et même grande pour des instances suffisamment «creuses» (voir section 3). Cependant, il est clair que l'approche semidéfinie doit être réservée au traitement de problèmes très difficiles, en particulier pour ceux où la programmation linéaire est inefficace. En effet, le gain obtenu sur la borne doit compenser la perte de temps provoquée par la résolution d'un SDP. Cependant, les derniers progrès des outils numériques et l'utilisation de relaxations SDP de plus en plus élaborées montrent que cette approche est dorénavant tout à fait exploitable dans la pratique, et ceci même dans le cadre de la résolution exacte de certains problèmes.

Références

- [Adams 1990] W.P. Adams et H.D. Sherali, "A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations of zero-one programming problems", *SIAM J. Disc. Math* 3, pp. 411-430, 1990.
- [Alizadeh 1995] F. Alizadeh "Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization", *SIAM J. Optim.*, 5(1), pp. 13-51, 1995.
- [Alon et Kahale 1995] N. Alon et N. Kahale, "Approximating the independence number via the theta-function" Technical report, Tel Aviv University, Israel.
- [Anjos 2002] M. F. Anjos. "An Improved Semidefinite Programming Relaxation for the Satisfiability Problem", Technical Report UW-E&CE#2002-09, University of Waterloo, Canada, June 2002.
- [Balas 1993] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuejols, "A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs". *Math. Prog. A* 58 pp. 295-323, 1993.
- [Benson 2000] S. Benson, Y. Ye, X. Zhang, "Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization" *SIAM J. Optim.*, 10(2), pp. 443-461, 2000.
- [Blanchard et al 2000] A. Blanchard, S. Elloumi, A. Faye, N. Wicker. "Un algorithme de coupes pour l'Affectation Quadratique". In Proceedings FRANCO III, Québec, Canada Mai 2001.
- [Burer Monteiro 2003] S. Burer, R.D. Monteiro, "A nonlinear programming algorithm for solving semidefinite programs via low-rank factorization." *Math Prog.* 95(2), pp 329-357, 2003.
- [Borchers 1999] Brian Borchers. CSDP, A C Library for Semidefinite Programming. *Optimization Methods and Software* 11(1) :613-623, 1999. <http://www.nmt.edu/borchers/csdp.html>
- [Cung Roupin 1999] Van Dat Cung et Frédéric Roupin, "A Parallel Branch-and-Bound Algorithm using a Semidefinite Programming Relaxation for the Vertex-Cover Problem" In Proceedings of ECCO XII, Bandol, France, 1999.
- [Faye Roupin 2004a] A.Faye et F.Roupin, "A lower bound for the Quadratic Assignment Problem based upon a semidefinite relaxation and a cutting planes approach" In Proceedings ECCO 2004, June 24-26, Beirut, Lebanon, 2004.
- [Faye Roupin 2004b] A. Faye, F. Roupin, "Partial Lagrangian and Semidefinite relaxations of Quadratic Programs". Rapport technique CEDRIC No 673, 2004. <http://cedric.cnam.fr>.
- [Freize et Jerrum 1995] A. Frieze et M. Jerrum. Improved approximation algorithms for MAX k-CUT and MAX BISECTION. IPCO IV Proc., LNCS 920, Springer 1995, pp. 1-13.
- [Goemans 1995] M.X. Goemans, S.P. Williamson, "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming" *Journal of the ACM* 42(6) :1115-1145, 1995.
- [Helmberg 1998] C. Helmberg, F. Rendl. Solving quadratic (0,1)-problems by semidefinite programs and cutting planes" *Math. Programming*, 82(3, Serie A), pp. 291-315, 1998.
- [Helmberg 2000a] C. Helmberg, F. Rendl, et R. Weismantel, "A Semidefinite Programming Approach to the Quadratic Knapsack Problem" *J. of Comb. Opt.* Vol. 4 pp. 197-215, 2000.

- [Helmberg 2000b] C. Helmberg, "Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization, Habilitationsschrift" ZIB-report ZR-00-34, KZZI, Takustrasse 7, 14195 Berlin, Germany, 2000.
- [Helmberg 2000c] C. Helmberg, F. Rendl, "A spectral bundle method for semidefinite programming" *SIAM J. Optim.* 10(3) :673-696, 2000.
- [Helmberg 2000d] C. Helmberg, "A C++ implementation of the Spectral Bundle Method", Manual version 1.1.1. <http://www-user.tu-chemnitz.de/helmberg/SBmethod/>.
- [Helmberg, 2001] C. Helmberg, "Cutting planes algorithm for large scale semidefinite relaxations". ZIB-Report ZR 01-26, KZZI, Takustraße 7, 14195 Berlin, Germany, 2001.
- [Helmberg 2003] C. Helmberg, "Numerical Evaluation of SBmethod", *Math Prog.* 95(2), pp 381-406, 2003.
- [Iyengar 2001a] G. Iyengar et M. T. Cezik, "Cutting planes for mixed 0-1 mixed semidefinite programs." *Integer and Combinatorial Optimization*, LNCS 2081, pp. 251-263, 2001.
- [Iyengar, 2001b] G. Iyengar, "Quadratic cuts for mixed 0-1 quadratic programs", Technical report, IEOR Dept., Columbia University, 2001.
- [Karger et al 1994] D. Karger, R. Motwani, et M. Sudan. Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming. FOCS'94, pp. 2-13, 1994.
- [Lasserre 2002a] J.B. Lasserre, "An Explicit Exact SDP Relaxation for Nonlinear 0-1 Programs" *SIAM J. Optim.* 12, pp. 756-769 2002.
- [Lasserre 2000b] J.B. Lasserre, "Semidefinite programming vs. LP relaxations for polynomial programming" *Math. Oper. Res.* 27(2) :347-360, 2002.
- [Laurent 1997] M. Laurent, S. Poljak, et F. Rendl, "Connections between semidefinite relaxations of the max-cut and stable set Problems" *Mathematical Programming* 77 pp. 225-246, 1997.
- [Laurent 2003] M. Laurent, "A comparison of the Sherali-Adams, Lovász-Schrijver and Lasserre relaxations for 0-1 programming" *Mathematics of Oper. Res.* 28, pp. 470-496, 2003.
- [Lemarechal 1999] C. Lemarechal et F. Oustry, "Semidefinite relaxations and Lagrangian duality with application to combinatorial optimization", RR-3710, INRIA Rhone-Alpes, ZIRST - 655 avenue de l'Europe, F-38330 Montbonnot Saint-Martin, June 1999.
- [Lovasz 1991] L. Lovász, A. Schrijver, "Cones of matrices and set functions and 0-1 optimization", *SIAM J. on Optimization* Vol. 1 pp. 166-190, 1991.
- [Mitchell 2002] J. E. Mitchell, K. Krishnan, "Cutting plane methods for semidefinite programming", Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, NY 12180 USA, 2002.
- [Mittelman 2003] Hans D. Mittelmann, "An Independent Benchmarking of SDP and SOCP Solvers" *Math Prog.* 95(2), pp. 407-430, 2003. <http://plato.asu.edu/bench.html>.
- [Nesterov 1994] Y. Nesterov, A. Nemirovski, "Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming" *SIAM Studies in Applied Mathematics* Philadelphia, 1994.
- [Poljak 1995] S. Poljak, F. Rendl, H. Wolkowicz, "A recipe for semidefinite relaxation for (0,1)-quadratic programming" *Journal of Global Optimization* Vol. 7, pp. 51-73, 1995.
- [Roupin 2004] F. Roupin, "From Linear to Semidefinite Programming : an Algorithm to obtain Semidefinite Relaxations for Bivalent Quadratic Problems" *Journal of Combinatorial Optimization* vol. 8(4), pp. 469-493, 2004.
- [SDPS 2003] G. Delaporte, S. Jouteau, F. Roupin, "SDP_S : a Tool to formulate and solve Semidefinite relaxations for Bivalent Quadratic problems", In Proceedings ROADEF 2003, Avignon 26-28 Février, 2003. <http://semidef.free.fr>.
- [Shor 1987] N.Z. Shor, "Quadratic optimization problems." *Soviet Journal of computer Systems Sciences* 25, pp 1-11, 1987.
- [Sturm 1999] J.F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones" *Optimization Methods and Software* 11, pp. 625-653, 1999.
- [Tütüncü et al 2003] Reha H. Tütüncü, K. C. Toh, Michael J. Todd, "Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3" *Math Prog.* Vol 95(2) pp 189-217, 2003.
- [Wolkowicz 2004] Henry Wolkowicz, "A Bibliography on Semidefinite Programming" <http://linwww.ira.uka.de/bibliography/Math/>.
- [Zhao 1998] Q. Zhao, S.E. Karish, F. Rendl, et H. Wolkowicz. "Semidefinite programming relaxations for the quadratic assignment problem". *J. of Comb. Opt.* 2(1) :71-109, 1998.

Article invité

Phénomènes de seuil ou transitions de phase dans les problèmes combinatoires

Olivier Dubois, Jacques Mandler¹

{Olivier.Dubois, Jacques.Mandler}@lip6.fr

Introduction.

Informellement, un système présente une transition de phase si une faible action sur l'un de ses paramètres entraîne un changement important des propriétés qui intéressent l'observateur. Ces paramètres modifiables depuis l'extérieur s'appellent paramètres de contrôle, et la valeur au passage de laquelle s'effectue la transition s'appelle seuil ou valeur critique.

Les systèmes auxquels nous nous intéressons sont gouvernés par des lois probabilistes, et nous examinons leurs propriétés limites lorsque leur taille augmente indéfiniment.

Comme nous le verrons, on distingue deux types de transition, les « *coarse* » (douces ou faibles) et les « *sharp* » (brusques ou fortes). La présence des premières va souvent presque de soi, les secondes en revanche traduisent une influence profonde du paramètre concerné sur le comportement du système, et potentiellement exploitables en pratique pour la résolution des problèmes modélisés.

Le double vocabulaire, physique et mathématico-informatique, vient des exemples historiques. Du côté physique il s'agissait d'abord du développement de la mécanique statistique (systèmes de molécules, puis particules chargées). Il n'est pas besoin d'insister : transition eau-glace avec la température comme paramètre de contrôle, etc. La théorie de la percolation aussi s'occupe au premier chef de phénomènes critiques. Le vocabulaire mathématico-informatique, vient de la modélisation des machines tolérantes aux pannes, puis de l'introduction des graphes aléatoires par Erdős et Rényi et leurs résultats sur les seuils de la composante géante et de la connexité notamment.

Il est question ici d'un développement récent en informatique, bien distinct des précédents et potentiellement d'une portée bien plus grande : l'émergence, depuis une quinzaine d'années, des transitions de phase dans l'étude des problèmes combinatoires. Ce qui est remarquable entre autres, et qui occasionne certains espoirs pour l'avenir, c'est que les transitions de phase mises en évidence dans

des recherches de plus en plus nombreuses, sont largement du type *sharp*, celles qui indiquent vraiment que l'on se rapproche de la structure profonde des problèmes. Et les problèmes concernés sont d'importance évidente pour tous, englobant des classes de problèmes NP-complets de plus en plus larges, les CSP (problèmes de satisfaction de contraintes), les plus emblématiques aussi *k*-SAT et ses variantes, le coloriage de graphes...

Une autre grande nouveauté est la multidisciplinarité désormais très réelle de ces recherches. Beaucoup des résultats les plus avancés sont le fait de physiciens qui trouvent là un domaine d'application pour les techniques élaborées de la mécanique statistique, de façon beaucoup plus convaincante que les premières tentatives d'il y a 20 ans sur le problème du voyageur de commerce.

Malgré cela, le domaine reste à ses tout débuts ; la théorie rigoureuse, en particulier, reste très en retard sur l'expérimentation et sur les calculs non rigoureux des physiciens. Peu de seuils sont connus exactement, ou même ont leur existence établie en toute rigueur ; et ce au prix d'années d'efforts à l'aide de méthodes classiques dans leur principe, mais techniquement difficiles et qu'il faut appliquer avec un maximum de subtilité à chaque cas spécifique.

Donnons un peu plus précisément l'idée d'un phénomène de seuil ou de transition de phase dans un problème combinatoire.

Un exemple simple.

L'exemple de transition de phase présenté ici n'est pas classique, mais il a l'avantage d'être immédiatement accessible. Il vient de l'algèbre de base que tout le monde connaît. Cet exemple montre que dans les problèmes qui peuvent être manipulés communément, on peut mettre en évidence le type de phénomènes qui nous intéresse dans cet article, simplement avec une vision nouvelle.

Notre exemple concerne la décomposition additive d'un ensemble fini d'entiers. Considérons l'ensemble $\{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$. On dit qu'il se décompose

¹LIP6, C.N.R.S.-Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

en la somme de $\{0, 2\}$ et $\{0, 3, 7\}$ selon la Table 1 d'addition élémentaire :

+	0	2
0	0	2
3	3	5
7	7	9

+	0	2	4
0	0	2	4
3	3	5	7
7	7	9	11

Table 1

Table 2

Cette décomposition est strictement non redondante. La décomposition de $\{0, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$ en $\{0, 2, 4\}$ et $\{0, 3, 7\}$ en revanche ne l'est pas car on retrouve deux fois l'entier 7 dans la Table 2.

Les décompositions non redondantes sont encore appelées décompositions de Minkowski ou polynômes de Minkowski. Elles servent à factoriser des polynômes à coefficients dans $\{0, 1\}$. Ainsi pour l'ensemble ci-dessus on a : $(1 + x^3 + x^2 + x^5 + x^7 + x^9) = (1 + x^2)(1 + x^3 + x^7)$. Les décompositions redondantes peuvent servir à factoriser des polynômes à coefficients sur des corps finis. De nombreuses études algébriques ont été consacrées à établir des conditions particulières de décomposabilité ou à étudier des types spécifiques de décomposabilité. Le point de vue adopté dans l'étude des transitions de phase est tout au contraire global. De manière informelle, la question posée est : existe-t-il un paramètre dit de contrôle qui selon sa valeur, influence de manière déterminante la décomposabilité du plus grand nombre possible d'ensembles d'entiers. C'est en quelque sorte un résultat statistique ou se plaçant d'un point de vue formel, un résultat probabiliste. Pour ce faire, on considère de manière uniforme tous les sous-ensembles possibles des n premiers entiers noté $[n]$. Puis on cherche à mettre en évidence un paramètre de ces sous-ensembles de telle sorte que pour une valeur précise presque tous les sous-ensembles passe brutalement d'un état où ils étaient décomposables à un état où ils ne sont plus décomposables ou l'inverse. Pour mettre en évidence un tel paramètre on n'a pas d'autre moyen que d'essayer de deviner un bon candidat. On s'aide habituellement d'expérimentations qui permettent de chercher par tâtonnant jusqu'à voir apparaître un phénomène de seuil ou transition sur un tracé graphique. C'est typiquement le cas dans le deuxième exemple qui sera décrit après. Ce n'est pas le cas dans le présent exemple pour des raisons de vitesse de convergence. Mais l'expérience montre que pour les quelques cas connus de transition de phase le paramètre est simple. Pour les sous-ensembles de $[n]$ le plus simple est d'abord de considérer le nombre d'entiers absents, qu'on note ici H , de la suite $0, \dots, n$. Il faut alors choisir l'échelle à laquelle les variations de H doivent

être étudié. Il s'agit concrètement de déterminer à quel ordre de grandeur, i.e. quelle fonction de la taille n , les variations de H doivent être prises en compte pour voir apparaître un phénomène de seuil s'il en existe un. Dans le cas où l'échelle n'est pas indiquée par des expérimentations, son choix peut être très difficile. Pour cette raison le problème général de décomposabilité a dû être restreint au problème de la p -décomposabilité, c'est à dire où l'un des deux sous-ensembles de décompositions a un nombre fixé p d'entiers. Seul le cas $p = 2$ a pu être entièrement résolu [6]. Pour p quelconque une conjecture a été avancée. Notons ici la difficulté majeure qui se pose dans l'étude des transitions de phase. Pour pouvoir espérer établir qu'il existe une transition de phase et plus précisément la localiser, il faut en pratique connaître à l'avance le paramètre de contrôle. On comprend alors l'importance du travail expérimental s'il est bien sûr faisable. Enonçons le résultat pour la 2-décomposabilité.

Theorem 1 Soit l'ensemble I obtenu en supprimant aléatoirement H entiers de $[n]$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(I \text{ est } 2\text{-décomposable}) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \overline{\lim} \frac{H}{\sqrt{1/2} n \ln n} < 1 \\ 0 & \text{si } \underline{\lim} \frac{H}{\sqrt{1/2} n \ln n} \geq 1 \end{cases}$$

Ce qui signifie que pour presque tout ensemble de $[n]$, en comptant le nombre d'entiers absents H rapporté à l'échelle $\sqrt{n \ln n}$ on peut décider s'il est décomposable ou non décomposable en comparant à la valeur $\sqrt{1/2}$

Le résultat de 2-décomposabilité peut paraître bien limité, pourtant il nécessite de faire appel à des techniques sophistiquées utilisant par exemple intensivement des grandes déviations dans leur développement les plus évolués. Pour la p -décomposabilité on conjecture que l'échelle ou apparaîtrait un phénomène de seuil serait $n^{1-1/p}(\ln n/p)^{1/p}$.

Transition de phase et complexité : le problème de Satisfaisabilité.

Il s'agit, bien sûr, du problème NP-complet prototype. Une formule k -CNF, construite sur un ensemble V de variables booléennes, est une suite ω de clauses, chacune étant un ensemble de k littéraux de la forme x ou \bar{x} avec $x \in V$. Une affectation $\gamma : V \rightarrow \{0, 1\}$ satisfait une clause si elle met au moins un de ses littéraux à 1, en convenant que $\gamma(\bar{x}) = 1 - \gamma(x)$. On dit que γ est une solution de ω , ou satisfait ω , si γ satisfait chaque clause de ω . Dans

le modèle k -SAT aléatoire le plus répandu, il est requis que les trois variables d'une clause soient distinctes; une formule peut cependant contenir plusieurs fois une même clause. Ce n'est pas forcément le modèle le plus manipulable, on en préfère parfois d'autres, essentiellement équivalents.

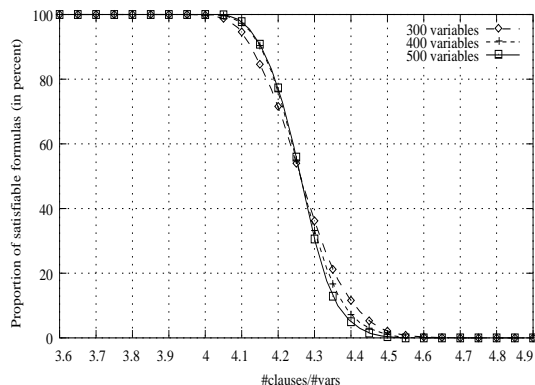


Figure 1 : Pourcentage de formules 3-SAT satisfaisables en fonction de m/n

La figure 1 montre le résultat de simulations d'un tel système, pour $|V| = n = 300, 400$ et 500 . Ces courbes donnent, en fonction du paramètre $c = m/n$, l'évolution de la probabilité de satisfaisabilité. On constate le redressement des courbes de probabilité lorsque n augmente, caractéristique de ce qu'on appellera un seuil *sharp*.

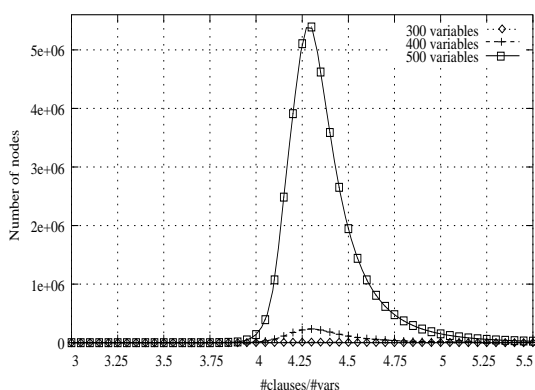


Figure 2 : Nombre moyen de noeuds des arbres de résolution en fonction de m/n

La figure 2 montre la difficulté de résolution, mesurée par le temps nécessaire à une procédure standard, dite DPLL pour trouver une solution ou pour conclure à son inexistence. On voit aussi les pics de difficulté de plus en plus élevés et de plus en plus étroits marquant un lien entre la difficulté de résolution et la transition de satisfaisabilité.

Seuils coarse et sharp.

Précisons mieux la distinction importante entre transitions *coarse*, et *sharp*. La présence d'une transition *coarse* ne fait que traduire, à la limite, l'évolution monotone de la probabilité qu'une instance aléatoire ait une solution en fonction du paramètre de contrôle, monotonie plus ou moins évidente si l'on a bien choisi le modèle.

A strictement parler, les transitions *sharp* sont un cas particulier des *coarse*, néanmoins lorsque nous opposons les deux nous sous-entendons qu'il est question de transitions *coarse* qui ne sont pas *sharp*. Notons aussi que les définitions diffèrent un peu selon les auteurs; ici nous donnons les plus simples, quitte à négliger certaines difficultés de détail.

La plupart des problèmes combinatoires donnant lieu à des transitions de phase entrent dans le cadre suivant.

Pour chaque instance I sont définis deux paramètres $\nu(I)$ et $\mu(I)$ qu'on peut se représenter comme déterminant respectivement la taille de l'ensemble des solutions potentielles, et la taille de l'instance. Par exemple, pour k -SAT $\nu(I) = n$, le nombre de variables, et $\mu(I) = m$, le nombre de clauses; pour la décomposabilité, $\nu(I) = n$, (la taille de l'ensemble d'entiers $[0, n - 1]$), et $m(I)$ est le nombre de entiers absents. I étant une instance aléatoire pour laquelle on impose une certaine dépendance entre n et m , notons P la limite, pour n infini, de la probabilité que I ait la propriété étudiée (soit satisfaisable, soit décomposable,...).

On appelle fonction de seuil au sens *coarse* pour le problème envisagé, toute fonction $f(n)$ telle que :

- (i) Si m dépend de n de telle sorte que $m/f(n) \rightarrow 0$, alors $P = 1$.
- (ii) Si m dépend de n de telle sorte que $m/f(n) \rightarrow \infty$, alors $P = 0$.

On appelle fonction de seuil au sens *sharp* pour le problème envisagé, toute fonction $f(n)$ telle que :

- (i) Si m dépend de n de telle sorte que pour un certain $a < 1$, l'on ait $m < af(n)$ pour n suffisamment grand, alors $P = 1$.
- (ii) Si m dépend de n de telle sorte que pour un certain $a > 1$, l'on ait $m > af(n)$ pour n suffisamment grand, alors $P = 0$.

Dans le cas de la décomposabilité, \sqrt{n} est une fonction de seuil au sens *coarse*; on pourra aussi regarder $1/2$ comme un exposant critique, puisque si $m = n^{1/2+\epsilon}$ certainement $m/\sqrt{n} \rightarrow 0$, et de même avec $1/2 - \epsilon$. Il y a aussi transition au sens *coarse*, mais il faut faire appel à une fonction plus précise, à savoir $\sqrt{n}/2 \ln n$. Dans le cas de 3-SAT, pour la valeur présumée c_0 , on a la fonction de seuil au sens

sharp $c_0 n$.

Comme on l'a dit, l'existence de seuils *coarse* n'est pas très surprenante ; par exemple, il est facile de montrer que la probabilité de 3-satisfaisabilité tend vers 0 lorsque $m > 5,1909 n$. L'abondance des seuils *sharp* est assez étonnante, et la concentration d'instances difficiles autour de ces seuils reste mal comprise.

Liens avec la physique statistique.

Les techniques utilisées par les physiciens pour traiter les problèmes combinatoires, ont été d'abord développées pour l'étude des verres de spin. Malgré leur nom, il ne s'agit pas du tout de verres, mais d'alliages magnétiques qu'une trempe ultra-rapide a figé dans un état de désordre structurel. Il se comportent ainsi comme des ions occupant des positions aléatoires, et le système se modélise par les valeurs de leurs moments magnétiques ou spins, susceptibles de passer brusquement de +1 à -1, et par l'association à chaque paire d'ions i et j d'un couplage $J_{i,j}$, positif ou négatif, traduisant la force de leur interaction.

Pour un verre de spin réel, résultent du processus de fabrication, mais comme on n'a pas de renseignement précis à leur sujet, il a fallu élaborer une théorie valable pour des couplages quelconques. Le problème de base qui est le calcul de l'état fondamental ou d'énergie minimum du matériau, est de fait en lui-même un problème d'optimisation combinatoire très difficile.

Il se trouve que pour beaucoup de problèmes combinatoires sans rapport a priori avec les verres de spin, il est possible de définir des systèmes de couplages tels que pour le verre de spin, bien entendu fictif, ainsi créé, le problème du calcul de son état fondamental correspond exactement au problème d'optimisation combinatoire de départ. On conçoit alors qu'il soit envisageable d'utiliser les techniques de calcul disponibles pour les verres de spin à la solution de ce problème. Ce serait remplacer un problème difficile par un autre problème difficile, mais en fait le verre de spin considéré n'est pas du tout quelconque, sa définition à partir d'un problème combinatoire lui impose des propriétés particulières qui peuvent parfois être exploitées pour obtenir malgré tout l'optimum exact. En utilisant, pour décrire ces propriétés, des idées d'origine informatique (la propagation dans les réseaux pro-

babilistes), et en faisant appel à des progrès récents sur les méthodes de calcul en mécanique statistique, les physiciens sont parvenus récemment à calculer ; exactement mais sans preuve, les optima de plusieurs problèmes qu'on ne sait pas traiter rigoureusement de façon exacte, principalement 3-SAT aléatoire et le coloriage de graphes. En même temps, ils ont obtenu un algorithme incomplet aux performances étonnantes sur les instances aléatoires de SAT.

Références

- [1] D. Achlioptas, A. Chtcherba, G. Istrate, and C. Moore, The Phase Transition in NAESAT and 1-in-k SAT, in Proceedings of SODA'01, p. 721-722 (2001).
- [2] B. Bollobas, C. Borgs, J. Chayes, J. Kim, D. Wilson, The Scaling Window Of The 2-Sat Transition, Random Structures and Algorithms 18, 201-256. (1999)
- [3] S. Cocco, O. Dubois, J. Mandler, and R. Monasson, Rigorous Decimation-Based Construction of Ground Pure States for Spin-Glass Models, Phys. Rev. Lett. 90, 047205 (2003).
- [4] N. Creignou, H. Daudé, Combinatorial sharpness criterion and phase transition classification for random CSPs, Information and Computation, v.190 n.2, p.220-238 (2004).
- [5] O. Dubois, Y. Boufkhad, J. Mandler, Typical random 3-SAT formulae and the satisfiability threshold, in Proceedings of the eleventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, San Francisco, California, p. 126-27 (2000)
- [6] O. Dubois, G. Louchard and J. Mandler, Additive Decompositions, Random Allocations, and Threshold Phenomena 2002. Combinatorics Probability and Computing, 13(4-5), p. 537-576 (2004)
- [7] O. Dubois, R. Monasson, B. Selman and R. Zecchina (eds). Special issue on phase transitions in combinatorial problems. Theoretical Computer Science 265(1) (2001).
- [8] M. Mézard, G. Parisi, R. Zecchina, Analytic and Algorithmic Solution of Random Satisfiability Problems, Science 297, 812 (2002).

Vie de l'association

Projet de GdR Recherche Opérationnelle

Communiqué par Philippe Chrétienne

Suite à une entrevue constructive avec Antoine Petit concernant le projet de GDR RO, une maquette du projet de GDR RO établie en collaboration avec Alain Quilliot et Marc Demange a été présentée début juillet à Maxime Crochemore, Directeur Adjoint du département STIC. Cette maquette a été bien comprise et bien accueillie. Maxime Crochemore nous a donné quelques pistes pour en améliorer l'impact au niveau de la communauté RO et nous avons envoyé une version révisée fin juillet. Depuis nous n'avons pas eu officiellement de réponse du CNRS mais nous avons appris que

des difficultés étaient apparues quant au rattachement de certains groupes déjà en place dans des GDR existants.

Des contacts ont été pris depuis et nous avons proposé récemment une solution fondée sur une organisation du GDR en un noyau identitaire RO et un ensemble de groupes à double appartenance constituant l'ancrage du GDR RO dans certains secteurs applicatifs. Nous avons fait parvenir cette proposition de solution à la direction du CNRS et nous devrions rencontrer Maxime Crochemore mi-décembre à ce sujet.

La Recherche Opérationnelle à l'honneur aux journées de la SMF

Communiqué par Philippe Baptiste

La journée annuelle 2005 de la Société Mathématique de France, qui s'est tenue le samedi 19 Juin 2004, avait pour thème la Recherche Opérationnelle. Le programme était le suivant.

- Débat : «Sauvons la recherche» : quelles propositions pour les mathématiques ?
- Alexander Schrijver (CWI and University of Amsterdam) Combinatoire des polyèdres et optimisation combinatoire.
- Claire Kenyon (Ecole Polytechnique) Algorithmes d'approximation.
- Philippe Baptiste (Ecole Polytechnique) Avancées récentes en ordonnancement par contraintes.
- Remise du Prix d'Alembert à Ex Nihilo pour une série de six films diffusés sur Arte en

2003 : carré magique, 20 février 2002 (jour palindromique), signe, jonglage, le cœur net et incertitudes. En recevant le prix au nom d'ex Nihilo, Florence Prébet regrette que l'hommage rendu aujourd'hui par le jury soit une éloge funèbre : l'émission primée a été déprogrammée par Arte en décembre 2003.

- Le prix Anatole Decerf a été attribué à la Revue «Diagonale». Cette revue éditée par le CNED propose aux lycéens des jeux débouchant sur une véritable activité mathématique. Parmi les thèmes développés, on trouve des questions sur les graphes, le principe de Dirichlet, la notion d'invariant, etc.

Renouvellement du Comité Editorial de la revue RAIRO-Operations Research

Communiqué par Philippe Mahey

Depuis octobre 2004, la revue scientifique RAIRO-Operations Research dispose d'une nouvelle équipe, mise en place avec l'aval et le soutien de la ROADEF et de la SMAI. Dans ses grandes lignes, la politique éditoriale de la revue est maintenue. Elle consiste à publier des articles scientifiques de qualité traitant de tous les aspects de la Recherche Opérationnelle.

La procédure d'évaluation des articles soumis à RAIRO suivra les standards appliqués par les revues scientifiques internationales et le Comité de Rédaction s'efforcera de garantir des délais de réponse de l'ordre de 6 mois. La RAIRO publie des articles en anglais et en français et elle entend privilégier :

- Les articles scientifiques apportant des résultats originaux et significatifs sur des aspects théoriques, numériques et applicatifs de la Recherche Opérationnelle;
- Les états de l'art fournissant une vision synthétique d'un domaine de pointe.

La RAIRO peut également publier des numéros spéciaux, soit thématiques, soit regroupant une sélection d'articles présentés dans une conférence. L'organisation générale du processus éditorial peut être consultée sur le site <http://www.edpsciences.org/ro>.

Le nouveau Comité Editorial est composé de :

Editeurs-en-Chef :

Alain Billionnet, IIE, CNAM Paris
Philippe Chrétienne, LIP6, Université Paris VI
Philippe Mahey, LIMOS, Université Clermont II

Conseil Editorial :

Gérard Cornuéjols (Uni. Marseille et Carnegie Mellon) : Optimisation Combinatoire
Erol Gelenbe (Imperial College, London) : Modèles Stochastiques
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (Uni. Toulouse) : Optimisation Continue

Maurice Queyranne (Uni. Grenoble et British Columbia) : Graphes et Algorithmes
Sylvain Sorin (Ecole Polytechnique) : Théorie des Jeux

Editeurs Associés :

W. P. Adams (Clemson U. South Carolina) : Programmation Discrète
D. Bienstock (Columbia U. NY) : Optimisation Combinatoire
J. Blazewicz (Uni. Varsovie) : Systèmes de Production
J. Carlier (UTC Compiègne) : Ordonnancement
D. De Werra (EPFL Lausanne) : Graphes et applications
F. Fages (ENS Ulm) : Contraintes
M. Fukushima (Kyoto U., Japon) : Inégalités Variationnelles, Programmation Convexe
M. Gendreau (CRT Montreal) : Localisation et Routage
C. Gonzaga (Uni. Florianopolis, Brésil) : Programmation Non Linéaire, Points Intérieurs
P. Hansen (HEC Montreal) : Optimisation Globale
A. Jean-Marie (INRIA et LIRMM, Montpellier) : Evaluation de Performance
J.-B. Lasserre (LAAS CNRS, Toulouse) : Programmation SDP, Dualité en nombres entiers
N. Limnios (UTC Compiègne) : Modèles Stochastiques
A. R. Mahjoub (Uni. Clermont) : Méthodes Polyédrales
P. Michelon (Uni. Avignon) : Programmation 0-1
V. Paschos (Paris IX) : Complexité et Approximation
G. Plateau (Paris XIII) : Optimisation Combinatoire
C. Ribeiro (UFF Rio de Janeiro) : Métaheuristiques
G. Savard (Polytechnique Montreal) : Programmes Biniveaux
A. Seeger (Uni. Avignon) : Optimisation Non-Différentiable

Le point sur le Challenge ROADEF'2005

par Van-Dat Cung¹

Le challenge ROADEF'2005 qui a débuté en juillet 2003 (!) arrive dans la phase finale. De nouveau, cette 4^{ème} édition a dépassé les éditions précédentes par le nombre de participants. 55 équipes initialement inscrites, 24 ont participé et finalement été classées après la phase de qualification. Sur ces 24 équipes restantes, 18 équipes (7 juniors et 11 seniors) sont allées jusqu'au bout de la phase finale. Alors qu'au même stade du challenge, l'édition 2003 en comptait 11.

Outre les challengers «réguliers» voire précédents vainqueurs que je remercie ici pour leurs soutiens de longues dates, il y a plus de 50% de nouvelles équipes. Cela dénote un certain rayonnement de cet événement.

Il est remarquable de noter que cette augmentation de participants n'est pas faite au détriment de la qualité des travaux. Bien au contraire ! J'en veux pour preuve les résultats de nouveaux extrêmement serrés de la phase de qualification (consultables sur site WEB du challenge <http://www.roadef.org>) et aussi de la phase finale, ces derniers seront annoncés avec la remise des prix pendant le congrès ROADEF'2005 à Tours. De plus, les équipes Juniors sont loin d'être ridicules face aux équipes Seniors, puisque les meilleures se retrouvent régulièrement parmi les premiers dans les classements globaux. Je rappelle qu'une équipe junior était première au classement global à la phase de qualification du chal-

lenge ROADEF'2003 !

Par ailleurs, notre partenaire de cette édition, le constructeur d'automobiles RENAULT est tout à fait satisfait des résultats obtenus et du déroulement de la compétition. Je rappelle que les éditions précédentes du challenge, 2001 avec le CELARDGA et 2003 avec l'ONERA-CNES, ont donné lieu des coopérations post-challenges entre les partenaires industriels et certaines des meilleures équipes.

Sur les deux principaux objectifs de ce challenge, à savoir

1. permettre aux industriels d'avoir une meilleure perception des développements récents dans le domaine de la Recherche Opérationnelle et de l'Aide à la Décision, et établir un partenariat permanent
2. confronter les jeunes universitaires à une problématique décisionnelle, souvent complexe, rencontrée dans le milieu industriel,

cette édition 2005 confirme de nouveau tout son intérêt.

Afin de permettre au challenge ROADEF de continuer à œuvrer dans cette direction, je fais ici appel à vous, membres actifs de la ROADEF, pour une proposition de sujet pour l'édition 2007. N'hésitez pas à me contacter par courriel, je compte sur vous !

4'OR, revue de la ROADEF

4'OR (voir la 4^{ème} de couverture de ce bulletin) est la revue des sociétés belge, française et italienne de Recherche Opérationnelle. Tous les membres de ces sociétés reçoivent automatiquement 4'OR avec leur adhésion. 4'OR est la revue de la ROADEF,

à nous de la soutenir ! Vous trouverez dans votre exemplaire toutes les informations nécessaires pour y soumettre vos articles.

Merci de signaler au bureau ROADEF tout problème concernant la réception de la revue.

¹lab.GILCO , ENSGI-INPG, Van-Dat.Cung@gilco.inpg.fr Responsable de l'organisation du challenge

Manifestations parrainées par la ROADEF

ROADEF'05

Tours - École Polytechnique de l'Université de Tours

du 14 au 16 février 2005

<http://www.ocea.li.univ-tours.fr/roadef05> ; <http://www.roadef.org>

Le 6ème congrès de la société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF) est organisé par le Laboratoire d'Informatique de l'Université de Tours et aura lieu à Polytech'Tours les 14,15 et 16 février 2005, au département Informatique et au département Productique.

Plus de 150 résumés ont été soumis. D'autre part cette année, pour la première fois, des articles longs ont été soumis, et ont donné lieu à une sélection. Au total, une cinquantaine d'articles longs ont été soumis. Sur ces articles soumis, 50% ont été sélectionnés pour donner lieu à une parution dans les Presses Universitaires François Rabelais. Pour les articles non sélectionnés, les auteurs ont été sollicités pour présenter un résumé de leur article.

Rappel des tarifs d'inscription (avant le 15 janvier 2005)

Membres ROADEF :	
• étudiants	: 60 euros
• non étudiants	: 120 euros
Non membres ROADEF :	
• étudiants	: 100 euros
• non étudiants	: 200 euros

Les tarifs seront majorés de 30 euros après le 15 janvier.

Programme prévisionnel

(un exposé durera 20 minutes, questions comprises) :

Lundi 14 février

8h30 Accueil, hall d'entrée EPU-DP (Département Productique, ex-EIT)
9h00 Discours d'ouverture

9h30 Session plénière : P. Perny (LIP6, Paris), —
Titre à venir —
10h30 Pause café
11h00 6 Sessions (5 papiers de 20')
12h50 Déjeuner
14h30 6 Sessions (3 papiers de 20')
15h30 Pause café
16h00 6 Sessions (3 papiers de 20')
17h00 Assemblée Générale de la ROADEF, grand amphithéâtre (DP)
19h00 Pot d'accueil, atrium EPU-DP

Mardi 15 février

8h30 Session plénière C. Dhaenens, RO et Optimisation : quelles perspectives pour le Datamining ?
9h30 6 Sessions (4 papiers de 20')
11h00 Pause café
11h30 6 Session (4 papiers de 20')
13h00 Déjeuner
14h30 Session plénière S. Oussedik, Récentes avancées en programmation mathématique
15h30 Pause café
15h50 6 Sessions (3 papiers de 20')
17h00 Pause
17h20 6 Sessions (3 papiers de 20')
20h00 Cocktail et dîner de gala, Hôtel de Ville

Mercredi 16 février

9h30 Session plénière J. Teghem, A. Bellabdaoui, Panorama des modèles de gestion de production dans l'industrie sidérurgique
10h30 6 Sessions (3 papiers de 20')
11h30 Pause café
12h00 6 Session (3 papiers de 20')
13h00 Déjeuner
14h30 Table Ronde «RO et industrie, avenir de la RO»
15h40 6 Sessions (4 papiers de 20')
17h00 Fin

Compte rendu de MOSIM'04

Communiqué par Stéphane Dauzère-Pérès

La conférence MOSIM est devenue un lieu de rencontre incontournable pour des chercheurs francophones en Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle travaillant sur différents aspects de la modélisation et de la simulation des systèmes industriels et logistiques. Le comité d'organisation et le comité scientifique ont fait leur possible pour que l'édition 2004 de MOSIM poursuive cette tradition et contribue au renforcement du prestige de la conférence.

En effet, 184 articles ont été soumis, en provenance d'une dizaine de pays. Le comité scientifique en a choisi 131 qui sont publiés dans les actes (après avoir été dûment évalués par deux relecteurs). Les articles acceptés sont organisés en 42 sessions sur trois jours. A cela il faut ajouter 4 conférences invitées données par des personnalités scientifiques internationales. MOSIM'04 a ainsi

montré qu'elle a sa notoriété et qu'elle répond à un vrai besoin. La conférence a été sponsorisée par plusieurs organismes scientifiques internationaux et nationaux (EURO, SCS, ESRA, ROADEF, SOGESCI-B.V.W.B., ImDR-SdF, GDR MACS), les collectivités locales (Région Pays de la Loire, Nantes Métropole), des industriels (SEGULA, Rockwell Software), l'IRCCYN, l'Ecole des Mines de Nantes, l'Université de Nantes et l'AIP PRIMECA.

Près de 200 personnes ont participé à MOSIM'04, dont plus de 70 étudiants. C'est lors du repas de gala, qui s'est déroulé dans une très bonne ambiance, qu'ont été annoncées l'attribution du prix jeunes chercheurs à égalité à deux doctorants et la prochaine édition de MOSIM à Rabat, au Maroc, à travers une collaboration entre l'EMI (Ecole Mohammedia d'Ingénieurs) et l'ENIM (Ecole Nationale de l'Industrie Minérale).

AE'05 : 7th International Conference on Artificial Evolution

Lille, 26-28 octobre 2005

Cette conférence est organisée par des membres du groupe de travail META, et parrainée par la ROADEF. Tous les renseignements sont sur le site <http://www.lifl.fr/~ea2005/>

Le bureau de la ROADEF

Contactez le bureau

Pour pouvez joindre chaque membre du bureau par e-mail à partir de sa fonction :

- president@roadef.org : Marie-Christine Costa
- secretaire@roadef.org : Jean-Charles Billaut
- tresorier@roadef.org : David De Almeida
- vpresident1@roadef.org : Eric Sanlaville (Le bulletin)
- vpresident2@roadef.org : safia Kedad-Sidhoum (le site web)
- vpresident3@roadef.org : Christian Artigues (4'OR et relations internationales)

Pour écrire à l'ensemble du bureau, vous pouvez utiliser l'adresse : bureau@roadef.org

Graph Theory 2004 : Une conférence à la mémoire de Claude Berge

Communiqué par Cédric Bentz et Marie Christine Costa

Du 5 au 9 juillet 2004 s'est tenue dans le cadre historique du Couvent des Cordeliers (Paris) la conférence *Graph Theory 2004* à la mémoire de Claude Berge. Les nombreux participants ont pu assister à des exposés d'un excellent niveau. Les sessions plénières ont abordé aussi bien les thèmes importants de la théorie des graphes que des sujets en rapport direct avec la vie de Claude Berge. L'ensemble de ces sessions a été assuré par des orateurs prestigieux, soit, dans l'ordre alphabétique : V. Chvátal, A. Frank, P. Hell, L. Lovász, J. Nešetřil, C. Thomassen et B. Toft. Mais la journée la plus attendue a sans doute été celle consacrée à la présentation de la preuve du *Théorème des Graphes Parfaits*, achevée en 2002 par M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour et R. Thomas. Ce théorème démontre la conjecture faite dès 1960 par Claude Berge sur la structure des graphes parfaits. Ce sont M. Chudnovsky, G. Cornuéjols et P. Seymour qui en ont exposé les grandes lignes aux participants.

Ils ont également détaillé leurs travaux portant sur quelques problèmes connexes fondamentaux comme la reconnaissance en temps polynomial des graphes parfaits.

En marge de ces sessions plénières, les posters affichés et de courts exposés ont abordé des thèmes assez éclectiques allant de la théorie des hypergraphes à l'étude des aspects combinatoires d'un problème de décision en ligne, sans oublier les problèmes classiques de recherche opérationnelle liés à l'optimisation dans les graphes.

Venus de tous les points du globe, de nombreux chercheurs ayant connu Claude Berge côtoyaient de jeunes doctorants déjà passionnés. Dotée d'une organisation exemplaire grâce en particulier à l'équipe Combinatoire de l'UPMC, cette conférence a été, de toute évidence, un bel hommage rendu par la communauté internationale à l'un des plus célèbres théoriciens des graphes.

EURO Summer Institute 2004

Communiqué par Anne-Lise Huyet

Le XXIIème EURO Summer Institute s'est déroulé du 9 au 25 Juillet 2004 à Ankara, Turquie. Il a réuni 25 étudiants parrainés par EURO représentant 15 nationalités différentes (Allemagne, Royaume-Uni, Brésil, Chili, Inde, Bulgarie, Russie, Italie, Espagne, Pologne,...) autour du thème «Optimization and Data-mining». Au cours de ces deux semaines, nous avons pu échanger, apprendre, communiquer sur la recherche opérationnelle, à la fois entre étudiants et avec les chercheurs confirmés qui assuraient chaque jour des communications sur leurs propres travaux ou des points de synthèse sur certains de leurs domaines de compétence. Parmi ces intervenants, Jakob Krarup nous a resitué les 97 premières années de la Recherche Opérationnelle, Georg Still nous a présenté les problèmes d'optimisation semi-définie, M. Kohler les aspects statistiques du data-mining, J. Kogan le data-mining sur des données textuelles de grande dimension et les récentes avancées faites dans ce contexte, B. Polyak la méthode de Newton et son utilisation en optimisation, Sjur Flam la théorie des jeux.

En plus de ces interventions, chaque participant a présenté les travaux lui ayant permis d'être sélectionné, ce qui a là encore été une source d'enrichissement et d'ouverture d'esprit, et a permis de premiers contacts pour de futures collaborations. A cela ce sont ajoutées diverses activités «non scientifiques» telles que des visites et trois jours en Cappadoce qui ont facilité les échanges scientifiques et amicaux. Le bilan que je ferais de cette école d'été est donc extrêmement positif en terme d'ouverture scientifique : toutes les méthodes présentées ne m'étaient pas familières, problèmes traités et façon de les aborder, début de collaboration scientifique,... ainsi qu'en terme de relations humaines : des liens d'amitié se sont créés, la majorité des participants échange régulièrement grâce à un news group par Internet, création d'un réseau de connaissances,... Ce fut vraiment une expérience riche et inoubliable, mille mercis à la Roadef de m'avoir permis d'y participer ainsi qu'à l'équipe organisatrice de cet EURO Summer Institute à Ankara !

Vie des groupes de travail ROADEF

compte rendu des activités du groupe

PM2O : Programmation Mathématique MultiObjectifs

par Clarisse Dhaenens

Pendant l'année 2004, le groupe PM2O de la ROADEF et du GT 1.6 du GDR I3 a connu un changement d'animateurs. En effet, Xavier Gandibleux et Vincent T'kindt, qui étaient à l'initiative du groupe créé en 2000, ont passé la main à Clarisse Dhaenens (LIFL - Lille) et Virginie Gabrel (Lamsade - Dauphine). Le site web a donc également été déplacé et vous le trouverez à l'adresse <http://www.lifl.fr/PM2O/>. N'hésitez pas à aller le consulter pour voir les différentes annonces.

Au cours de cette année, nous avons été accueilli par l'ESC de Brest et l'ENST Bretagne pour une réunion qui s'est déroulée le 28 avril (voir bulletin ROADEF 12).

Les prochains rendez-vous du groupe sont tout d'abord la conférence ROADEF'2005 en février à Tours, puisque deux sessions spéciales PM2O y seront organisées. Puis nous planifions de faire une

réunion à Lille vers le mois de mai, en collaboration avec le Groupe META de la ROADEF.

D'ors et déjà nous pouvons aussi vous donner rendez-vous en juin 2006, pour la conférence MOPGP'06 (Multi-Objective Programming et Goal Programming), organisée pour la première fois en France.

Mais la vie d'un groupe, c'est avant tout la vie de ses participants. Aussi, si vous souhaitez faire partie de la mailing liste et des participants recensés du groupe, envoyez simplement un mail à clarisse.dhaenens@lifl.fr. De même, si vous souhaitez présenter vos travaux au sein du groupe, et pouvoir en discuter, n'hésitez pas à nous contacter.

Nous vous donnons donc rendez-vous en 2005!!

Clarisse Dhaenens - dhaenens@lifl.fr
Virginie Gabrel - gabrel@lamsade.dauphine.fr

compte rendu des

10^{ème} et 11^{ème} Journées Franciliennes de Recherche Opérationnelle

par Lucas Létocart (communiqué par Karine Deschinkel)

La dixième édition des Journées Franciliennes de Recherche Opérationnelle s'est déroulée le 11 juin dernier au Carré des Sciences à Paris. Cette journée avait pour thème "Optimisation convexe : relaxation lagrangienne, décomposition et génération de colonnes". C'est Claude Lemaréchal, de l'INRIA, qui a présenté le tutorial de la journée sur la dualité, théorie et algorithmes de base. Lors de cet exposé, l'accent a été particulièrement mis sur la relaxation lagrangienne. L'orateur a mis en évidence les relations existant entre la relaxation lagrangienne et d'autres relaxations, telles que la SDP et la génération de colonnes, il a ensuite présenté différents algorithmes, tels que les méthodes de sous-gradient et ellipsoïde, Dantzig-Wolfe, ou encore les méthodes des faisceaux et accpm.

L'après-midi, quatre autres exposés étaient au programme.

Jean-Philippe Vial, de l'Université de Genève, a présenté des méthodes de résolution de problèmes de multiflots linéaires par relaxation lagrangienne partielle.

Nancy Perrot, de l'Université de Bordeaux, a ensuite proposé une comparaison de la méthode des faisceaux et de la génération de colonnes classique. Après la pause café, Monique Guignard-Spielberg, de l'Université de Pennsylvanie aux États-Unis et qui était en visite à l'Université de Valenciennes, a présenté des cas particuliers de la relaxation lagrangienne, en insistant notamment sur la décomposition lagrangienne.

Enfin, Thierry Benoist, de Bouygues SA, a présenté des bornes supérieures pour le tv-breaks packing

problem.

Nous remercions tous les orateurs de cette journée pour leur participation et pour la qualité de leur présentation. Cette journée avait attiré un public

nombreux.

Les transparents de ces présentations sont en ligne sur le site des JFRO (accessible depuis le site de la ROADEF).

La onzième édition des Journées Franciliennes de Recherche Opérationnelle s'est déroulée le 19 novembre dernier au Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris. Cette journée avait pour thème «Emploi du temps et planning». C'est Federico Della Croce, de l'Université de Turin en Italie et qui était en visite au LAMSADE de l'Université Paris-Dauphine, qui a présenté le tutorial de la journée sur les constructions d'emplois du temps scolaires, sportifs et hospitaliers. Lors de cet exposé, l'accent a été particulièrement mis sur l'état de l'art des approches de résolution existantes pour ces problèmes. L'orateur a ensuite proposé différentes applications, notamment pour la ligue de football italienne et pour la construction des emplois du temps d'infirmières dans un service hospitalier.

L'après-midi, quatre autres exposés étaient au programme.

Nabil Guerinik, de Temposoft, a présenté un outil générique de planification du personnel de la grande distribution, basé sur un langage de modélisation propre et sur un algorithme de Branch and Price.

Denis Montaut, d'Eurodécision, a ensuite fait un exposé sur l'utilisation de la R.O. comme aide à la

planification des ressources humaines en s'appuyant sur l'expérience d'Eurodécision.

Après la pause café, Fethi Jarray du CNAM, a présenté des méthodes de résolution pour le problème de la planification de personnel avec deux ou trois jours de repos par semaine.

Enfin, Francois Ramond, de la SNCF-DRT, a présenté deux approches de programmation linéaire en nombres entiers pour la conception de roulements de personnels sédentaires.

Nous remercions tous les orateurs de cette journée pour leur participation et pour la qualité de leur présentation. Cette journée avait attiré un public nombreux.

Les transparents de certaines de ces présentations sont en ligne sur le site des JFRO (accessible depuis le site de la ROADEF).

La prochaine journée aura lieu au mois de mars 2005 à Paris sur le thème de «Théorie des jeux et Recherche Opérationnelle». Le programme et les informations pratiques seront bientôt disponibles sur notre site Web.

Le comité d'organisation : Laurent Alfandari, Eric Angel, Karine Deschinkel et Lucas Létocart.

compte rendu des activités du groupe

SCDD : Systèmes Complexes et Décisions Distribuées

par Stéphane Bonnevey

Au cours de cette année 2004, le groupe SCDD, groupe de travail du GdR MACS, a organisé ou participé à 3 journées de travail :

- le 13 février 2004 à Lyon (organisée par le groupe SCDD) : Cette journée avait pour but de réunir notre groupe avec le groupe MMS (Modélisation Multiple et Simulation) afin de confronter nos travaux. Le thème de la journée était l'« aide à la décision », que ce soit au niveau opérationnel pour l'ordonnancement et l'affectation dans un système de production, ou au niveau de la modélisation de la prise de décision en génie de la production par exemple.

- le 1^{er} avril 2004 à Paris XII (organisée par le

groupe META) : Cette journée, organisée à Paris XII, était commune avec le groupe de travail META (Théorie et applications des META-heuristiques). L'objectif était de faire se rencontrer les deux groupes afin de dégager d'éventuels projets communs en matière d'aide à la décision ; et en particulier, quel rôle pouvaient jouer les méta-heuristiques pour la résolution de problèmes liés à la théorie des jeux.

- le 2 avril 2004 à Lyon (organisée par le groupe SCDD) : Le groupe SCDD voulait rendre hommage à Bernard Roy en organisant une journée autour du thème de la décision, de l'agrégation des préférences, de l'élicitation des préférences et du

processus de décision.

La groupe SCDD a également participé à deux rencontres nationales du GDR MACS (en mars et octobre 2004). Lors de ces rencontres, nous avons proposé un projet de recherche sur le thème : « Développement d'outils de simulation pour la négociation ». Pour cela, trois axes ont été pri-

vilégiés : la théorie des jeux, l'agrégation des préférences et les systèmes multi-agents.

Deux réunions de groupe sont déjà prévues pour l'année à venir. La première, en mars, qui devrait traiter des systèmes complexes autour du transport aérien ; la seconde, en juin, où nous allons proposer un atelier de travail sur les systèmes multi-agents.

compte rendu des activités du groupe

CRO : Contraintes et Recherche Opérationnelle

par Sophie Demassey, Fabien Le Huédé et Narendra Jussien

Le groupe de travail *Contraintes et RO* a été créé au printemps 2003 dans le cadre de l'Action Spécifique Recherche Opérationnelle du CNRS. Il est rattaché au pôle Optimisation Combinatoire du GdR ALP et est affilié à l'Association Française de Programmation par Contraintes (AFPC) et à la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF). Ce groupe a pour but de réunir les chercheurs issus de la programmation par contraintes ou de la recherche opérationnelle et intéressés dans la conception de nouvelles méthodes d'optimisation combinatoire combinant divers techniques de ces deux domaines.

Suite au succès des premières réunions du groupe, les fondateurs du groupe, Philippe Baptiste, Narendra Jussien et Pierre Lopez, ont lancé, en novembre 2003, un appel à communications pour **édition d'un numéro spécial** de la revue RAIRO-Recherche Opérationnelle/Operations Research. Ce numéro est actuellement en cours de

finalisation et sera bientôt prêt pour parution.

En juin 2004, l'animation du groupe a été reprise par **Sophie Demassey** et **Fabien Le Huédé** avec le soutien de **Narendra Jussien**. A la suite de ce changement, un **nouveau site web** a été mis en place à l'adresse suivante :
<http://ppcro.free.fr>

Le groupe organisera une **session au congrès Roadef 2005** qui se déroulera les 14, 15 et 16 février 2005 à Tours.

Nous avons aussi l'intention d'organiser une table ronde au cours de ce congrès. En effet, l'heure est à une nouvelle étape du groupe. Nous souhaitons ainsi **réaliser un état de l'art** et une cartographie sur l'ensemble des méthodes hybridant programmation par contraintes et recherche opérationnelle. Les personnes intéressées peuvent d'ores et déjà se faire connaître avant un appel à participation plus formel qui précèdera le congrès.

compte rendu des activités du groupe

META : Théorie et applications des méta-heuristiques

Responsables : Patrick Siarry et El-Ghazali Talbi

Créé en mai 2002, le groupe META est maintenant groupe de travail du pôle STP du GdR MACS. L'objectif scientifique principal du groupe est le suivant : étude des métaheuristiques dédiées à la résolution approchée des problèmes d'optimisation difficile.

Ses activités au cours du second semestre 2004 ont été :

- organisation de deux sessions du Congrès FRANCORO'2004 (Fribourg, suisse, août 2004). Environ 20 présents par session.
- Organisation d'une session du Congrès MOSIM'2004 (Nantes, septembre 2004). 15 présents.
- Dans le cadre du Congrès du GdR MACS, pôle STP (Aix en Provence, octobre 2004),

- organisation de deux sessions de recherche. 15 présents par session.
- Futures manifestations :
- Organisation d'une session du Congrès IMACS'2005 (11-15 juillet 2005, Paris).
 - Par l'intermédiaire du GT META, la ROADEF sponsorise l'organisation du Congrès EA'2005 (26-28 octobre 2005, à Lille).
- Axes futurs de développement du groupe :
- Optimisation multiobjectif, en commun avec

le groupe de travail PM2O « Programmation Mathématique Multi-Objectif » de la ROADEF : une journée de travail en commun entre META et PM2O est prévue au printemps 2005.

- Systèmes auto-organisés (colonies de fourmis, essais particulières) : structuration de la communauté de chercheurs au niveau national, avec la participation forte du Laboratoire d'Informatique de Tours.

compte rendu des activités du groupe

PM : Programmation Mathématique

Communiqué par Sourour Elloumi

Le nouveau Groupe de Travail « Programmation Mathématique », commun au GdR ALP, a la volonté affichée de répondre à un double objectif. Ce doit être avant tout une occasion pour les chercheurs (expérimentés ou non) intéressés par la Programmation Mathématique de se rencontrer, de se connaître, de se réunir plus souvent que le rythme annuel des congrès de la ROADEF ne l'y autorise pour échanger idées et points de vues sur la discipline. C'est la raison pour laquelle des journées sont régulièrement organisées permettant ces rencontres et la présentation d'exposés. Mais il est également important que ces rencontres soient concrétisées par une forme de production scientifique afin de donner pleinement son sens à l'expression « Groupe de travail ».

En particulier, nous avons proposé à toutes les personnes intéressées d'utiliser le cadre de ce GT pour constituer des mini groupes de travail sur un thème précis. Chacun de ces mini groupes doit avoir pour finalité de rédiger ce qui constituera un chapitre d'un ouvrage pour lequel nous cherchons un éditeur. Il pourra s'agir tout aussi bien de chapitres synthétiques, par exemple des états de l'art poussés où des résultats numériques seraient également présentés, que de chapitres où de nouvelles problématiques seraient présentées, définies et clarifiées, soit en raison d'une émergente importance industrielle, soit parce qu'elles invoquent à la fois la programmation mathématique et d'autres

disciplines. Cet ouvrage constituera ainsi d'une part une photographie (partielle) de l'activité française en programmation mathématique mais aussi le point de départ de futurs travaux. Les premières problématiques que nous avons ainsi identifiées ont été :

- Flexibilité et robustesse en programmation mathématique et notamment le traitement de contraintes inconnues lors de la résolution initiale,
- Problèmes de sacs-à-dos multiples,
- « Supply Chain » et Programmation Mathématique,
- Branch-and-Price-and-Cut,
- Dimensionnement de réseaux.

Au cours de l'année 2003/2004, le groupe s'est réuni deux fois à l'Université de Paris-Dauphine (5-12-2003) d'abord puis au CNAM ensuite (30-04-2004) grâce à Virginie Gabrel et Sourour Elloumi. Nous avons alors eu la chance d'assister à des exposés donnés par : Maurice Queyranne, Michel Vasquez, Sophie Demassez, Pierre Bonami, Edith Naudin, Sylvain Nestour, Martine Labbé, Madiagne Diallo, Ridha Mahjoub, Rumen Andonov et de recevoir, à chaque fois, plus de 50 personnes. Une troisième rencontre est prévue au cours du premier trimestre 2005, à Nîmes, organisée par Michel Vasquez.

Responsables : Sourour Elloumi, Virginie Gabrel, Thierry Mautor, Philippe Michelon, Pierre Tolla.

Annonces des manifestations à venir

(Si non mentionnés, les sites web de ces manifestations sont atteignables à partir du site de la ROADEF)

PAREO 2005 : Forth International Workshop of the EURO Working Group on Parallel Processing in Operations Research

Mont-Tremblant - Montréal (Canada), 16-21 janvier

ORBEL'05 : the annual conference of the SOGESCI-BVWB, the Belgian Operations Research Society

Université Catholique de Louvain, Louvain la neuve (Belgique), 27-28 janvier

ORPA-1 : First conference on OR Practice in Africa

Ouagadougou (Burkina Faso), 7-8 avril

ASMDA : International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis

Brest, 17-20 mai

CIRO'05 : Quatrième Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle

Marrakech (Maroc), 23-26 Mai
<http://www.ucam.ac.ma/fssm/ciro05/>

ECCO XVIII

Combinatorics for modern manufacturing, logistics, and supply chains

Minsk (Biélorussie), 26-28 mai

MAPSP : Models and Algorithms for Planning and Scheduling Problems

Sienne (Italie) 6-10 juin

**JFPC'2005 : Premières Journées Francophones de Programmation par
Contraintes**

Lens - Université d'Artois du 8 au 10 juin 2005

<http://www.cril.univ-artois.fr/JFPC05/>

**IPCO : Eleventh Conference on Integer Programming and Combinatorial
Optimization**

Berlin, 8-10 juin

**MISTA : Second Multidisciplinary Conference on Scheduling : Theory and
Applications**

New York, 18-21 juillet

Rejoindre la ROADEF

Rôle de ROADEF

Selon ses statuts la ROADEF a pour mission de favoriser l'essor de la Recherche Opérationnelle et de l'Aide à la Décision en France. Pour cela, elle s'emploie à développer l'enseignement et la formation en RO-AD, favoriser la recherche dans le domaine de la RO-AD, diffuser la connaissance en matière de RO-AD, notamment auprès des industriels, représenter les intérêts de la RO-AD auprès des organisations nationales ou internationales ayant des buts similaires.

Cotisations 2005

Les cotisations pour l'année 2005 sont les suivantes :

- membre actif 55 euros
- membre étudiant 15 euros
- membre retraité 40 euros
- membre institutionnel 165 euros
- membre bienfaiteur 150 euros

Les tarifs proposés ci-dessus incluent, outre les services habituels de l'association :

- Membre actif, retraité, bienfaiteur : le bulletin ROADEF, 1 Abonnement à 4'OR, 1 tarif réduit aux conférences, 1 vote
- Membre étudiant : idem mais 4'OR ne sera fournie que si le budget de la ROADEF le permet.
- Membre institutionnel : le bulletin ROADEF, 1 Abonnement à 4'OR, 3 tarifs réduits aux conférences, 1 vote.

Inscriptions

Vous pouvez télécharger un formulaire d'adhésion sur le site de la ROADEF : <http://www.roadef.org>
Pour toute information complémentaire, merci de contacter David De Almeida (tresorier@roadef.org) ou Jean-Charles Billaut (secretaire@roadef.org).

ROADEF : LE BULLETIN

Bulletin de la société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision
association de loi 1901

Procédure technique de soumission :

Le texte soumis pour parution dans le bulletin doit être fourni à Eric Sanlaville

Comité de rédaction :

Marie-Christine Costa, Christian Artigues, Jean-Charles Billaut, David De Almeida,
Safia Kedad-Sidhoum, Eric Sanlaville

Composition du Bulletin :

Eric Sanlaville

Ce numéro a été tiré en 220 exemplaires. Les bulletins précédents sont disponibles sur le site de la ROADEF.